بسمه تعالی

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

خلاصه‌ای از مهم‌ترین نکات و فرمول‌ها

مهدی تقدسی

انرژی و توان سیگنال

نکته ۱: انرژی کل یک سیگنال دوره‌محدود و کراندار، محدود است و در نتیجه توان کل آن برابر صفر خواهد بود.

سیگنال دوره‌محدود و کراندار $\longrightarrow$ $E_\infty < \infty \quad , \quad P_\infty = ۰$

نکته ۲: برای محاسبه انرژی یا توان کل یک سیگنال، می‌توان سیگنال را به بازه‌های زمانی جداگانه تقسیم کرد و انرژی یا توان کل هر قسمت را محاسبه و در آخر با هم جمع نمود.

$E\{x(t)\} = \sum_i E_i$	، E_i ها انرژی کل قسمت‌های جداگانه از سیگنال $x(t)$
$P\{x(t)\} = \sum_i P_i$	، P_i ها توان کل قسمت‌های جداگانه از سیگنال $x(t)$

نکته ۳: از دو نکته قبل می‌توان نتیجه گرفت که اگر دو سیگنال مختلف، فقط در یک قسمت کراندار با دوره زمانی محدود با هم تفاوت داشته باشند، توان کل آن‌ها یکسان خواهد بود؛ زیرا طبق نکته ۱، توان کل هر قسمت کراندار با دوره زمانی محدود برابر صفر است و بنابراین تأثیری در توان کل سیگنال ندارد.

اگر سیگنال‌های $x(t)$ و $y(t)$ فقط در یک قسمت کراندار و دوره‌محدود، با هم تفاوت داشته باشند؛ $\longrightarrow$ $P\{x(t)\} = P\{y(t)\}$

سیگنال‌های متناوب

نکته۴: اگر $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد، آنگاه $x(f(t))$ لزوماً متناوب نیست، بنابراین رابطه $x(f(t+T)) = x(f(t))$ لزوماً برقرار نمی‌باشد؛ ولی می‌توان از رابطه $x(t+T) = x(t)$ اثبات کرد که تساوی $x(f(t)+T) = x(f(t))$ حتماً برقرار است. $f(t)$ می‌تواند هر سیگنال دلخواهی باشد.

$x(t)$ متناوب با T $\longrightarrow$ $x(t+T) = x(t) \Rightarrow \begin{cases} x(f(t)+T) = x(f(t)) \\ x(f(t+T)) \overset{?}{=} x(f(t)) \end{cases}$

نکته ۵: دوره تناوب سیگنال‌های $\cos at$ و $\sin at$ و e^{jat} برابر $\frac{۲\pi}{a}$ و دوره تناوب سیگنال‌های $\tan at$ ، $\cot at$ ، $|\cos at|$ و $|\sin at|$ برابر $\frac{\pi}{a}$ می‌باشد.

$\cos at \, , \, \sin at \, , \, e^{jat}$ $\longrightarrow$	$T = \frac{۲\pi}{a}$
$\tan at \, , \, \cot at \, , \, |\cos at| \, , \, |\sin at|$ $\longrightarrow$	$T = \frac{\pi}{a}$

نکته ۶: در سیگنال‌های $\cos\omega_\circ n$ ، $\sin\omega_\circ n$ و $e^{j\omega_\circ n}$ ، اگر کسر $\frac{۲\pi}{\omega_\circ}$ گویا نباشد، سیگنال‌ها متناوب نمی‌باشند؛ ولی اگر کسر $\frac{۲\pi}{\omega_\circ}$ گویا باشد، سیگنال‌های مذکور متناوب هستند و برای محاسبه دوره تناوب آن‌ها، ابتدا کسر $\frac{۲\pi}{\omega_\circ}$ را تا حد امکان ساده می‌کنیم؛ سپس صورت کسر برابر دوره تناوب اصلی سیگنال خواهد بود.

$$\cos\omega_\circ n\ ,\ \sin\omega_\circ n\ ,\ e^{j\omega_\circ n} \longrightarrow \begin{cases} \frac{۲\pi}{\omega_\circ}\ \text{گویا} \longrightarrow N \triangleq \left(\text{صورت کسر}\ \frac{۲\pi}{\omega_\circ}\right) \\ \frac{۲\pi}{\omega_\circ}\ \text{غیرگویا} \longrightarrow \text{نامتناوب} \end{cases}$$

نکته ۷: اگر $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N متناوب باشد، سیگنال $x[n^۲]$ نیز متناوب خواهد بود. اگر N مضرب ۴ باشد، دوره تناوب اصلی $x[n^۲]$ برابر $\frac{N}{۲}$ می‌باشد؛ و اگر N مضرب ۴ نباشد، دوره تناوب اصلی $x[n^۲]$ برابر همان N خواهد بود.

$$x[n]\ \text{متناوب با}\ N \longrightarrow \begin{cases} N\ \text{مضرب ۴} \longrightarrow x[n^۲]\ \text{متناوب با}\ \frac{N}{۲} \\ O.W \longrightarrow x[n^۲]\ \text{متناوب با}\ N \end{cases}$$

نکته ۸: انرژی کل یک سیگنال متناوب، بی‌نهایت است. اما توان کل سیگنال متناوب $x(t)$ یا $x[n]$ برابر توان آن سیگنال در یک دوره تناوب می‌باشد. یعنی:

$$P_\infty = P_T = \frac{۱}{T}\int_T |x(t)|^۲\,dt \quad , \quad P_\infty = P_N = \frac{۱}{N}\sum_{n=<N>} |x[n]|^۲$$

نکته ۹: توان کل سیگنال‌های متناوب $A\cos at$ و $A\sin at$ با استفاده از نکته ۸ برابر $\frac{|A|^۲}{۲}$ و توان سیگنال ثابت A و سیگنال Ae^{jat} نیز برابر $|A|^۲$ به‌دست می‌آید. این نکته در حالت زمان‌گسسته نیز صادق است.

$$A\cos at\ ,\ A\sin at \longrightarrow P = \frac{|A|^۲}{۲}$$
$$A\ ,\ Ae^{jat} \longrightarrow P = |A|^۲$$

نکته ۱۰: اگر $x(t)$ با دوره تناوب اصلی T متناوب باشد، آنگاه $x(\alpha t)$ با دوره تناوب اصلی $\frac{T}{\alpha}$ متناوب خواهد بود (α ثابتی حقیقی).

$$x(t)\ \text{متناوب با}\ T \longrightarrow x(\alpha t)\ \text{متناوب با}\ \frac{T}{\alpha}$$

نکته ۱۱: اگر $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N متناوب باشد، آنگاه $x_m[n]$ با دوره تناوب اصلی mN متناوب خواهد بود (m عددی طبیعی). منظور از $x_{(m)}[n]$ ، سیگنال گسترده شده با ضریب m می‌باشد.

$$x[n]\ \text{متناوب با}\ N \longrightarrow x_{(m)}[n]\ \text{متناوب با}\ mN$$

نکته ۱۲: اگر $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N متناوب باشد، آنگاه $x[mn]$ متنـاوب اسـت و بـرای محاسـبه دوره تنـاوب اصـلی آن، ابتـدا کسر $\frac{N}{m}$ را تا حد امکان ساده می‌کنیم؛ سپس صورت کسر برابر دوره تناوب اصلی $x[mn]$ خواهد بود.

$$x[n] \text{ متناوب با } N \longrightarrow x[mn] \text{ متناوب با صورت کسر } \frac{N}{m}$$

نکته ۱۳: هر سیگنال $x(t)$ به فرم کلی $x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} z(t-mT)$ با دوره تناوب T متناوب است.

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} z(t\pm mT) \longleftrightarrow x(t) \text{ متناوب با } T$$

سیگنال‌های زوج و فرد

نکته ۱٤: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ فرد باشد، داریم:

$$x(t) \text{ فرد} \longrightarrow x(\circ)=x_o(\circ)=\circ \quad , \quad \int_{-a}^{a} x(t)\,dt=\circ$$

$$x[n] \text{ فرد} \longrightarrow x[\circ]=x_o[\circ]=\circ \quad , \quad \sum_{n=-m}^{m} x[n]=\circ$$

نکته ۱۵: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ زوج باشد، داریم:

$$x(t) \text{ زوج} \longrightarrow x(\circ)=x_e(\circ) \quad , \quad \int_{-a}^{a} x(t)\,dt=۲\int_{\circ}^{a} x(t)\,dt$$

$$x[n] \text{ زوج} \longrightarrow x[\circ]=x_e[\circ] \quad , \quad \sum_{n=-m}^{m} x[n]=۲\sum_{n=\circ}^{m} x[n]-x[\circ]$$

نکته ۱۶: اگر $x(t)$ زوج باشد، آنگاه $x\big(f(t)\big)$ لزوماً زوج نیست، بنابراین رابطه $x\big(f(-t)\big)=x\big(f(t)\big)$ لزوماً برقرار نمـی‌باشـد؛ ولـی می‌توان به‌راحتی از رابطه $x(-t)=x(t)$ اثبات کرد که رابطه $x\big(-f(t)\big)=x\big(f(t)\big)$ حتماً برقرار است. همچنین اگـر $x(t)$ فـرد باشـد، آنگاه $x\big(f(t)\big)$ لزوماً فرد نیست، بنابراین رابطه $x\big(f(-t)\big)=-x\big(f(t)\big)$ لزوماً برقرار نمی‌باشد؛ ولی رابطـه $x\big(-f(t)\big)=-x\big(f(t)\big)$ حتماً برقرار است. $f(t)$ می‌تواند هر تابع دلخواهی باشد. این نکته در حالت زمان‌گسسته نیز صادق است.

$$x(t) \text{ زوج} \longrightarrow x(-t)=x(t) \Rightarrow \begin{cases} x\big(-f(t)\big)=x\big(f(t)\big) \\ x\big(f(-t)\big)\overset{?}{=}x\big(f(t)\big) \end{cases}$$

$$x(t) \text{ فرد} \longrightarrow x(-t)=-x(t) \Rightarrow \begin{cases} x\big(-f(t)\big)=-x\big(f(t)\big) \\ x\big(f(-t)\big)\overset{?}{=}-x\big(f(t)\big) \end{cases}$$

نکته ۱۷: اگر سیگنال مختلط $x(t)$ یا $x[n]$ زوج باشد، آنگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی آن سیگنال‌هایی زوج می‌باشند؛ همچنین اندازه و فاز آن نیز توابعی زوج خواهند بود. عکس این قضیه نیز صادق است.

$x(t)$ زوج $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}[x(t)]\,,\,\mathrm{Im}[x(t)]$ زوج

$x(t)$ زوج $\Longleftrightarrow$ $|x(t)|\,,\,\measuredangle x(t)$ زوج

نکته ۱۸: اگر سیگنال مختلط $x(t)$ یا $x[n]$ فرد باشد، آنگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی آن سیگنال‌هایی فرد می‌باشند؛ عکس این قضیه نیز صادق است. در مورد اندازه و فاز یک سیگنال فرد نمی‌توان نکته چندان مفیدی مطرح نمود.

$x(t)$ فرد $\longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}[x(t)]\,,\,\mathrm{Im}[x(t)]$ فرد

نکته ۱۹: اگر سیگنال دلخواه $x(t)$ برای $t<0$ برابر صفر باشد، آنگاه می‌توان $x(t)$ را از روی $x_e(t)$ یا $x_o(t)$ با استفاده از روابط زیر به‌دست آورد:

$$x(t)=0\,,\,t<0 \longrightarrow x(t)=\begin{cases}2x_e(t) & , t>0\\ x_e(0) & , t=0\\ 0 & , t<0\end{cases} \quad , \quad x(t)=\begin{cases}2x_o(t) & , t>0\\ x(0) & , t=0\\ 0 & , t<0\end{cases}$$

نکته ۲۰: انرژی (یا توان) یک سیگنال برابر مجموع انرژی (یا توان) قسمت‌های زوج و فرد آن می‌باشد.

$$E\{x(t)\}=E\{x_e(t)\}+E\{x_o(t)\} \qquad , \qquad P\{x(t)\}=P\{x_e(t)\}+P\{x_o(t)\}$$

محاسبه $\delta(f(t))$

نکته ۲۱: اگر $t=t_i$ ریشه حقیقی و مرتبه اول $f(t)$ باشد، آنگاه $\delta(f(t))$ شامل یک ضربه در $t=t_i$ با اندازه $\frac{1}{|f'(t_i)|}$ خواهد بود. بنابراین $\delta(f(t))$ به تعداد ریشه‌های حقیقی و مرتبه اول خود، ضربه دارد که اندازه هر کدام از آن‌ها برابر $\frac{1}{|f'(t_i)|}$ می‌باشد. به‌طور خلاصه می‌توان بیان کرد:

$$\delta(f(t))=\sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i) \quad , \quad t_i \text{ها ریشه‌های حقیقی و مرتبه اول } f(t)$$

سیستم‌های خطی

نکته ۲۲: در یک سیستم خطی، اگر ورودی $x(t)$ ترکیب خطی از ورودی یا ورودی‌های دیگر باشد، خروجی آن نیز ترکیب خطی از خروجی یا خروجی‌های دیگر خواهد بود.

$$x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)+\cdots \xrightarrow{\text{سیستم خطی}} y(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)+\cdots$$

نکته ۲۳: در یک سیستم خطی، پاسخ به ورودیِ «همیشه صفر» $(x(t)=0)$ برابر خروجیِ «همیشه صفر» $(y(t)=0)$ می‌باشد.

$$x(t)=0 \xrightarrow{\text{سیستم خطی}} y(t)=0$$

سیستم‌های بدون‌حافظه

نکته ۲۴: در یک سیستم بدون‌حافظه، اگر دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$، در لحظه‌ای از زمان با هم برابر باشند، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود، یعنی خروجی‌ها نیز در همان لحظه با هم برابرند.

$$x_2(t_0)=x_1(t_0) \xrightarrow{\text{سیستم بدون‌حافظه}} y_2(t_0)=y_1(t_0)$$

سیستم‌های خطی و بدون‌حافظه

نکته ۲۵: رابطه ورودی ـ خروجی یک سیستم خطیِ بدون‌حافظه به‌صورت $y(t)=f(t)\cdot x(t)$ می‌باشد.

$$\text{سیستم خطی بدون‌حافظه} \longleftrightarrow y(t)=f(t)\cdot x(t)$$

نکته ۲۶: در یک سیستم خطی بدون‌حافظه اگر ورودی $x_2(t)$ در لحظه‌ای از زمان، α برابر ورودی $x_1(t)$ باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t_0)=\alpha x_1(t_0) \xrightarrow{\text{سیستم خطی بدون‌حافظه}} y_2(t_0)=\alpha y_1(t_0)$$

نکته ۲۷: در یک سیستم خطی بدون‌حافظه اگر ورودی در لحظه‌ای از زمان برابر صفر باشد، خروجی نیز در همان لحظه برابر صفر خواهد بود.

$$x(t_0)=0 \xrightarrow{\text{سیستم خطی بدون‌حافظه}} y(t_0)=0$$

سیستم‌های علی

نکته ۲۸: در یک سیستم علی، اگر دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ تا لحظه‌ای از زمان یکسان باشند، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t)=x_1(t)\ ,\ t<t_0 \xrightarrow{\text{سیستم علی}} y_2(t)=y_1(t)\ ,\ t<t_0$$

سیستم‌های خطی و علی

نکته ۲۹: در یک سیستم خطی و علی، اگر ورودی $x_2(t)$ تا لحظه‌ای از زمان، α برابر ورودی $x_1(t)$ باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t)=\alpha x_1(t)\ ,\ t<t_0 \xrightarrow{\text{سیستم خطی و علی}} y_2(t)=\alpha y_1(t)\ ,\ t<t_0$$

نکته ۳۰: در یک سیستم خطی و علی، اگر ورودی تا لحظه‌ای از زمان برابر صفر باشد، خروجی آن نیز تا آن لحظه از زمان برابر صفر خواهد بود. به این ویژگی، سکون اولیه می‌گویند.

$$x(t)=0\ ,\ t<t_0 \xrightarrow{\text{سیستم خطی و علی}} y(t)=0\ ,\ t<t_0$$

نکته ۳۱: در سیستم‌های خطی، علی بودن و سکون اولیه داشتن، معادل هم می‌باشند، یعنی از هر کدام می‌توان دیگری را نتیجه گرفت.

$$\text{سیستم علی} \xleftrightarrow{\text{سیستم خطی}} \text{سکون اولیه}$$

سیستم‌های TI

نکته ۳۲: در یک سیستم TI، اگر ورودی $x_2(t)$ شیفت‌یافته ورودی $x_1(t)$ به مقدار t_0 باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t)=x_1(t-t_0) \xrightarrow{\text{سیستم TI}} y_2(t)=y_1(t-t_0)$$

نکته ۳۳: در یک سیستم TI، اگر ورودی سیگنالی متناوب با دوره تناوب T باشد، خروجی نیز با دوره تناوب T متناوب خواهد بود (البته لزوماً دوره تناوب‌های اصلی ورودی و خروجی با هم برابر نیستند). همچنین با توجه به اینکه سیگنال‌های ثابت نیز حالت خاصی از سیگنال‌های متناوب می‌باشند، پس در یک سیستم TI، اگر ورودی سیگنالی ثابت باشد، خروجی نیز ثابت خواهد بود.

$$\begin{array}{ccc} x(t)=x(t-T) & \longrightarrow & y(t)=y(t-T) \\ & \text{سیستم TI} & \\ x(t)=C_1 & \longrightarrow & y(t)=C_2 \end{array}$$

سیستم‌های LTI

نکته ۳۴: در یک سیستم LTI، اگر ورودی $x(t)$ ترکیب خطی و انتقالی از ورودی یا ورودی‌های دیگر باشد، خروجی آن نیز برابر ترکیب خطی و انتقالی از خروجی یا خروجی‌های دیگر خواهد بود.

$$x(t)=\alpha x_1(t-t_1)+\beta x_2(t-t_2)+\cdots \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y(t)=\alpha y_1(t-t_1)+\beta y_2(t-t_2)+\cdots$$

سیستم‌های بدون‌حافظه و TI

نکته ۳۵: رابطه یک سیستم بدون‌حافظه و TI در حالت کلی به‌صورت $y(t)=f\left(x(t)\right)$ می‌باشد (که منظور از f، یک تابع است).

$$\text{سیستم بدون‌حافظه و TI} \longleftrightarrow y(t)=f\left(x(t)\right)$$

نکته ۳۶: در یک سیستم بدون‌حافظه و TI، اگر ورودی $x(t)$، در دو لحظه t_1 و t_2 مقدار یکسانی داشته باشد، خروجی آن نیز همین‌طور خواهد بود.

$$x(t_2)=x(t_1) \xrightarrow{\text{سیستم بدون‌حافظه و TI}} y(t_2)=y(t_1)$$

نکته ۳۷: در یک سیستم بدون‌حافظه و TI، اگر مقدار ورودی $x_1(t)$ در لحظه t_1، با مقدار ورودی $x_2(t)$ در لحظه t_2 برابر باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t_2)=x_1(t_1) \xrightarrow{\text{سیستم بدون‌حافظه و TI}} y_2(t_2)=y_1(t_1)$$

سیستم‌های LTI و بدون‌حافظه

نکته ۳۸: رابطه یک سیستم LTI و بدون‌حافظه به‌صورت $y(t)=Ax(t)$ می‌باشد که A یک ضریب ثابت است. یعنی در یک سیستم LTI و بدون‌حافظه، خروجی مضربی ثابت از ورودی است.

$$\text{سیستم LTI و بدون‌حافظه} \longleftrightarrow y(t)=Ax(t)$$

سیستم‌های علی و TI

نکته ۳۹: در یک سیستم علی و TI، اگر ورودی تا لحظه‌ای از زمان با دوره تناوب T متناوب باشد، خروجی نیز تا آن لحظه با دوره تناوب T متناوب خواهد بود. همچنین در حالت خاص اگر ورودی تا لحظه‌ای از زمان، ثابت باشد، خروجی نیز تا آن لحظ از زمان، ثابت خواهد بود.

$$\begin{aligned} x(t)=x(t-T)\ ,\ t<t_0 &\xrightarrow{\hspace{2em}} y(t)=y(t-T)\ ,\ t<t_0 \\ &\text{سیستم علی و TI} \\ x(t)=C_1\ ,\ t<t_0 &\xrightarrow{\hspace{2em}} y(t)=C_2\ ,\ t<t_0 \end{aligned}$$

سیستم‌های پایدار

نکته ٤٠: در یک سیستم پایدار اگر ورودی در همه زمان‌ها محدود (کراندار) باشد، خروجی نیز در همه زمان‌ها محدود (کراندار) خواهد بود.

$$\boxed{\forall t: \ |x(t)| < \infty \xrightarrow{\text{سیستم پایدار}} \forall t: \ |y(t)| < \infty}$$

سیستم‌های بدون‌حافظه و پایدار

نکته ٤١: در یک سیستم بدون‌حافظه و پایدار اگر ورودی در لحظه‌ای از زمان محدود باشد، خروجی نیز در آن لحظه محدود خواهد بود.

$$\boxed{|x(t_\circ)| < \infty \xrightarrow{\text{سیستم بدون‌حافظه و پایدار}} |y(t_\circ)| < \infty}$$

❈ توجه شود که ویژگی سیستم‌های بدون‌حافظه (نکته ٢۴) نیز در مورد این سیستم باید صادق باشد.

سیستم‌های خطی و بدون‌حافظه و پایدار

نکته ٤٢: در یک سیستم خطی و بدون‌حافظه و پایدار اگر ورودی در لحظه‌ای از زمان محدود باشد، خروجی نیز در آن لحظه محدود خواهد بود.

$$\boxed{|x(t_\circ)| < \infty \xrightarrow{\text{سیستم خطی و بدون‌حافظه و پایدار}} |y(t_\circ)| < \infty}$$

❈ توجه شود که ویژگی سیستم‌های خطی و بدون‌حافظه (نکات ٢۵ و ٢۶ و ٢٧) نیز در مورد این سیستم باید صادق باشد.

سیستم‌های علی و پایدار

نکته ٤٣: در یک سیستم علی و پایدار اگر ورودی تا لحظه‌ای از زمان محدود باشد، خروجی نیز تا آن لحظه محدود خواهد بود.

$$\boxed{|x(t)| < \infty \ , \ t < t_\circ \xrightarrow{\text{سیستم علی و پایدار}} |y(t)| < \infty \ , \ t < t_\circ}$$

❈ توجه شود که ویژگی سیستم‌های علی (نکته ٢٨) نیز در مورد این سیستم باید صادق باشد.

بررسی وارون‌پذیری

نکته ٤٤: **در سیستم‌های چندضابطه‌ای (زمان‌پیوسته و زمان‌گسسته) بعد از اینکه ورودی را برحسب خروجی نوشتیم و در ضابطه‌ها نیز ابهام نداشتیم، آنگاه یکی از سه حالت زیر وجود خواهد داشت:**

حالت اول: اگر شرط‌ها روی زمان باشد؛ در این حالت شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این است که شرط‌ها مکمّل هم باشند (یعنی همه زمان‌ها در شرط‌ها پوشش داده شوند).

حالت دوم: اگر شرط‌ها روی $x(t)$ یا $x(t_\circ)$ باشد؛ در این حالت شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این است که اولاً شرط‌ها، مکمّل هم باشند، ثانیاً بعد از جایگذاری شرط‌ها از هر ضابطه برحسب خروجی، شرط‌های به‌دست‌آمده، با هم تداخل و همپوشانی نداشته باشند.

حالت سوم: اگر شرط‌ها روی $x\left(f(t)\right)$ باشد؛ در این حالت شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این است که اولاً شرط‌ها مکمّل هم باشند (یعنی همه مقادیر ورودی در شرط‌ها پوشش داده شوند)، ثانیاً بعد از جایگذاری شرط‌ها از هر ضابطه برحسب خروجی، شرط‌های به‌دست‌آمده، با هم تداخل و همپوشانی نداشته باشند و همچنین مکمّل هم نیز باشند.

شرط‌ها روی زمان:	شرط‌ها روی زمان، مکمّل	$\longleftrightarrow$	وارون‌پذیر
شرط‌ها روی $x(t)$:	شرط‌ها روی ورودی، مکمّل و روی خروجی بدون تداخل	$\longleftrightarrow$	وارون‌پذیر
شرط‌ها روی $x\left(f(t)\right)$:	شرط‌ها روی ورودی، مکمّل و روی خروجی، بدون تداخل و مکمّل	$\longleftrightarrow$	وارون‌پذیر

نکته ٤٥: **با استفاده از نکته ۳۵ می‌دانیم که رابطه یک سیستم بدون‌حافظه و TI به‌صورت $y(t)=f\left(x(t)\right)$ می‌باشد. شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این سیستم‌ها این است که تابع $y=f(x)$ یک‌به‌یک باشد.**

$y=f(x)$ یک‌به‌یک $\xleftrightarrow{\text{سیستم بدون‌حافظه و TI}}$ وارون‌پذیر

نکته ٤٦: **شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری یک سیستم بدون‌حافظه این است که رابطه y برحسب x به‌ازای همه t ها یک‌به‌یک باشد.**

$\forall t:$ تابع y برحسب x یک‌به‌یک است. $\xleftrightarrow{\text{سیستم بدون‌حافظه}}$ وارون‌پذیر

نکته ٤٧: **شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری یک سیستم خطی این است که تنها ایجادکننده‌ی خروجیِ «همیشه صفر» ($y(t)=\circ$)، ورودیِ «همیشه صفر» ($x(t)=\circ$) باشد.**

$\left(x(t)=\circ \longleftrightarrow y(t)=\circ\right)$ $\xleftrightarrow{\text{سیستم خطی}}$ وارون‌پذیر

نکته ۴۸: سیستم زمان‌پیوسته $y(t)=Ax(at+t_1)+Bx(bt+t_2)$ (با فرض $a,b\neq 0$)، فقط به‌ازای "$A\neq \pm B\ ,\ a=-b$" وارون‌پذیر است؛ و سیستم زمان‌گسسته $y[n]=Ax[an+n_1]+Bx[bn+n_2]$ (با فرض $a,b\neq 0$)، فقط به‌ازای "$A\neq \pm B\ ,\ a=-b=1$" وارون‌پذیر می‌باشد.

$y(t)=Ax(at+t_1)+Bx(bt+t_2)$	$\xrightarrow{A\neq \pm B\ ,\ a=-b}$	وارون‌پذیر
$y[n]=Ax[an+n_1]+Bx[bn+n_2]$	$\xrightarrow{A\neq \pm B\ ,\ a=-b=1}$	وارون‌پذیر

نکته ۴۹: اگر در رابطه سیستمی، خارج از آرگومان ورودی اثری از زمان نباشد، آنگاه <u>شرط لازم</u> برای وارون‌پذیری این است که تابع y برحسب x یک‌به‌یک باشد. یعنی اگر تابع y برحسب x یک‌به‌یک نباشد، سیستم قطعاً وارون‌ناپذیر خواهد بود.

اگر تابع y برحسب x یک‌به‌یک نباشد.	$\xrightarrow{\text{سیستم بدون زمان خارجی}}$	وارون‌ناپذیر

نکته ۵۰: برای بررسی وارون‌پذیری سیستم‌هایی که رابطه آن‌ها به‌صورت $y(t)=T\{x(t)\}+f(t)$ یا $y(t)=T\{x(t)\}\cdot g(t)$ (و $\forall t: g(t)\neq 0$) می‌باشد، کافی است وارون‌پذیری سیستم $y(t)=T\{x(t)\}$ را بررسی نماییم.

$y(t)=T\{x(t)\}+f(t)$	$\longleftrightarrow$	$y(t)=T\{x(t)\}$
	از لحاظ وارون‌پذیری	
$y(t)=T\{x(t)\}\cdot g(t)$	$\underset{\forall t:\ g(t)\neq 0}{\longleftrightarrow}$	$y(t)=T\{x(t)\}$

سیستم‌های وارون‌پذیر

نکته ۵۱: در یک سیستم وارون‌پذیر، ورودی‌های متمایز، خروجی‌های متمایز ایجاد می‌کنند. به عبارت بهتر، ورودی‌های یکسان، خروجی‌های یکسان را نتیجه می‌دهند و <u>بالعکس</u>.

$x_1(t)=x_2(t)$	$\xleftrightarrow{\text{سیستم وارون‌پذیر}}$	$y_1(t)=y_2(t)$

سیستم‌های خطی و وارون‌پذیر

نکته ۵۲: در یک سیستم خطی و وارون‌پذیر، اگر ورودی $x(t)$ ترکیب خطی از ورودی یا ورودی‌های دیگر باشد، خروجی آن نیز ترکیب خطی از خروجی یا خروجی‌های دیگر خواهد بود و بالعکس.

$$x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)+\cdots \xleftrightarrow{\text{سیستم خطی و وارون‌پذیر}} y(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)+\cdots$$

نکته ۵۳: در یک سیستم خطی و وارون‌پذیر، پاسخ به ورودیِ «همیشه صفر» $(x(t)=0)$ برابر خروجیِ «همیشه صفر» $(y(t)=0)$ می‌باشد و بالعکس. یعنی تنها ایجاد کننده خروجیِ «همیشه صفر»، ورودیِ «همیشه صفر» می‌باشد.

$$x(t)=0 \xleftrightarrow{\text{سیستم خطی و وارون‌پذیر}} y(t)=0$$

سیستم‌های بدون‌حافظه و وارون‌پذیر

نکته ۵۴: در یک سیستم بدون‌حافظه و وارون‌پذیر، اگر دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$، در لحظه‌ای از زمان با هم برابر باشند، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود و بالعکس.

$$x_2(t_0)=x_1(t_0) \xleftrightarrow{\text{سیستم بدون‌حافظه و وارون‌پذیر}} y_2(t_0)=y_1(t_0)$$

سیستم‌های خطی و بدون‌حافظه و وارون‌پذیر

نکته ۵۵: با توجه به اینکه رابطه یک سیستم خطی بدون‌حافظه به‌صورت $y(t)=f(t)\cdot x(t)$ می‌باشد، شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این سیستم‌ها این است که $f(t)$ به‌ازای همه t ها مخالف صفر باشد.

$$\text{سیستم خطی و بدون‌حافظه و وارون‌پذیر} \longleftrightarrow y(t)=f(t)\cdot x(t) \quad , \quad \forall t:\ f(t)\neq 0$$

نکته ۵۶: در یک سیستم خطی و بدون‌حافظه و وارون‌پذیر، اگر ورودی $x_2(t)$ در لحظه‌ای از زمان، α برابر ورودی $x_1(t)$ باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهد بود و بالعکس.

$$x_2(t_0)=\alpha x_1(t_0) \xleftrightarrow{\text{سیستم خطی و بدون‌حافظه و وارون‌پذیر}} y_2(t_0)=\alpha y_1(t_0)$$

نکته ۵۷: در یک سیستم خطی و بدون‌حافظه و وارون‌پذیر، اگر ورودی در لحظه‌ای از زمان برابر صفر باشد، خروجی نیز در همان لحظه برابر صفر خواهد بود و بالعکس.

$$x(t_0)=0 \xleftrightarrow{\text{سیستم خطی و بدون‌حافظه و وارون‌پذیر}} y(t_0)=0$$

سیستم‌های TI و وارون‌پذیر

نکته ۵۸: در یک سیستم TI و وارون‌پذیر، اگر ورودی $x_2(t)$ شیفت‌یافته ورودی $x_1(t)$ باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود و بالعکس.

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{سیستم TI و وارون‌پذیر}} y_2(t) = y_1(t - t_0)$$

نکته ۵۹: در یک سیستم TI و وارون‌پذیر، اگر ورودی سیگنالی متناوب با دوره تناوب T باشد، خروجی نیز با دوره تناوب T متناوب خواهد بود و بالعکس (یعنی دوره تناوب‌های اصلی ورودی و خروجی با هم برابرند). با توجه به اینکه سیگنال‌های ثابت نیز حالت خاصی از سیگنال‌های متناوب هستند، در یک سیستم TI و وارون‌پذیر، اگر ورودی سیگنالی ثابت باشد، خروجی نیز ثابت خواهد بود و بالعکس.

$$x(t) = x(t - T) \longleftrightarrow y(t) = y(t - T)$$

سیستم TI و وارون‌پذیر

$$x(t) = C_1 \longleftrightarrow y(t) = C_2$$

سیستم‌های بدون‌حافظه و TI و وارون‌پذیر

نکته ۶۰: با توجه به اینکه رابطه یک سیستم بدون‌حافظه و TI به‌صورت $y(t) = f\big(x(t)\big)$ می‌باشد، شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این سیستم‌ها این است که تابع $y = f(x)$ یک‌به‌یک باشد.

سیستم بدون‌حافظه و TI و وارون‌پذیر $\longleftrightarrow$ $y(t) = f\big(x(t)\big)$, $y = f(x)$ یک‌به‌یک

نکته ۶۱: در یک سیستم بدون‌حافظه و TI و وارون‌پذیر، اگر ورودی $x(t)$، در دو لحظه t_1 و t_2 مقدار یکسانی داشته باشد، خروجی آن نیز همین‌طور خواهد بود و بالعکس.

$$x(t_2) = x(t_1) \xleftrightarrow{\text{سیستم بدون‌حافظه و TI و وارون‌پذیر}} y(t_2) = y(t_1)$$

نکته ۶۲: در یک سیستم بدون‌حافظه و TI و وارون‌پذیر، اگر مقدار ورودی $x_1(t)$ در لحظه t_1، با مقدار ورودی $x_2(t)$ در لحظه t_2 برابر باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود و بالعکس.

$$x_2(t_2) = x_1(t_1) \xleftrightarrow{\text{سیستم بدون‌حافظه و TI و وارون‌پذیر}} y_2(t_2) = y_1(t_1)$$

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از کانولوشن

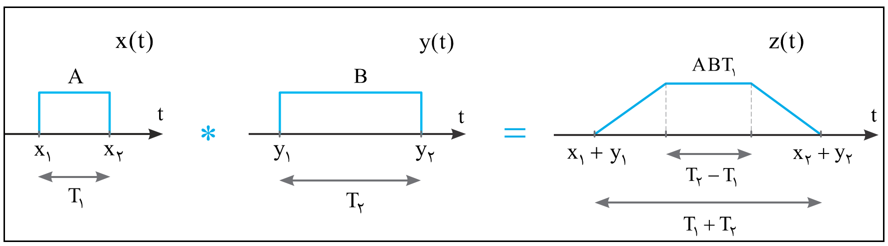
نکته ۶۳: اگر $z(t)=x(t)*y(t)$ باشد، آنگاه روابط زیر برای مشتق و انتگرال $z(t)$ وجود دارد:

$$z(t)=x(t)*y(t) \longleftrightarrow z'(t)=x'(t)*y(t)=x(t)*y'(t)$$

$$z(t)=x(t)*y(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{t} z(\tau)\,d\tau=\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right]*y(t)=x(t)*\left[\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau\right]$$

کانولوشن سیگنال‌های پالسی

نکته ۶۴: فرض کنید سیگنال‌های $x(t)$ و $y(t)$، دو سیگنال پالسی به شکل زیر باشند. با فرض اینکه $T_{۱}<T_{۲}$ باشد، کانولوشن این دو سیگنال، یک ذوزنقه متقارن به شکل $z(t)$ خواهد بود.



تأثیر مقیاس‌دهی و انتقال زمانی در کانولوشن

نکته ۶۵: اگر $z(t)=x(t)*y(t)$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\boxed{x(t)*y(t)=z(t) \longrightarrow x(at+t_{۱})*y(at+t_{۲})=\frac{۱}{|a|}z(at+t_{۱}+t_{۲})}$$

که $t_{۱}$، $t_{۲}$ و a مقادیر ثابت حقیقی هستند. در حالت خاص $a=-۱$ و $t_{۱}=t_{۲}=۰$ به فرمول مهم زیر می‌رسیم:

$$\boxed{x(t)*y(t)=z(t) \longrightarrow x(-t)*y(-t)=z(-t)}$$

این نکته در حالت زمان‌گسسته نیز فقط در حالت $a=۱$ یا $a=-۱$ برقرار است.

کانولوشن با قطار ضربه

نکته ۶۶: اگر سیگنال دلخواه $z(t)$ با قطار ضربه متناوب با دوره تناوب T، کانولو شود، سیگنال حاصل قطعاً با دوره تناوب T متناوب خواهد بود.

$$\boxed{x(t)=z(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) \longrightarrow \text{متناوب با } T \;\; x(t)}$$

روابط پاسخ ضربه و پله در سیستم‌های LTI

نکته ۶۷: اگر $h[n]$ پاسخ ضربه و $s[n]$ پاسخ پله یک سیستم LTI زمان‌گسسته باشند، روابط زیر بین $h[n]$ و $s[n]$ برقرار است:

$$\boxed{s[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}h[n-k] \quad , \quad s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k] \quad , \quad h[n]=s[n]-s[n-1]}$$

نکته ۶۸: پاسخ حالت دائمی یک سیستم LTI به ورودی پله واحد (یعنی $s[+\infty]$) برابر است با:

$$\boxed{s[+\infty]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]}$$

نکته ۶۹: اگر $h(t)$ پاسخ ضربه و $s(t)$ پاسخ پله یک سیستم LTI زمان‌پیوسته باشند، خواهیم داشت:

$$\boxed{s(t)=\int_{0}^{+\infty}h(t-\tau)\,d\tau \quad , \quad s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\,d\tau \quad , \quad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=s'(t)}$$

نکته ۷۰: پاسخ حالت دائمی یک سیستم LTI به ورودی پله واحد (یعنی $s(+\infty)$) برابر است با:

$$\boxed{s(+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\,d\tau}$$

بررسی خواص سیستم‌های LTI با استفاده از پاسخ ضربه

نکته ۷۱: شرط لازم و کافی برای بدون‌حافظه بودن یک سیستم LTI این است که $h[n]$ برای $n \neq 0$ برابر صفر باشد که در این صورت رابطه سیستم نیز به‌صورت $y[n]=Ax[n]$ می‌باشد.

سیستم LTI بدون‌حافظه زمان‌گسسته $\longleftrightarrow$	$h[n]=0\ ,\ n\neq 0$ $\longleftrightarrow$	$y[n]=Ax[n]$
سیستم LTI بدون‌حافظه زمان‌پیوسته $\longleftrightarrow$	$h(t)=0\ ,\ t\neq 0$ $\longleftrightarrow$	$y(t)=Ax(t)$

نکته ۷۲: شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم LTI این است که پاسخ ضربه $h[n]$ برای $n<0$ برابر صفر باشد، یا به‌طور معادل برای حالت زمان‌پیوسته $h(t)$ برای $t<0$ برابر صفر باشد.

سیستم LTI علی زمان‌گسسته $\longleftrightarrow$	$h[n]=0\ ,\ n<0$
سیستم LTI علی زمان‌پیوسته $\longleftrightarrow$	$h(t)=0\ ,\ t<0$

نکته ۷۳: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI زمان‌گسسته این است که پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع‌پذیر باشد، یعنی مجموع $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|$ محدود باشد. همچنین شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI زمان‌پیوسته این است که پاسخ ضربه آن مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، یعنی انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt$ محدود باشد.

سیستم LTI پایدار زمان‌گسسته	$\longleftrightarrow$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| < \infty$
سیستم LTI پایدار زمان‌پیوسته	$\longleftrightarrow$	$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt < \infty$

نکته ۷۴: اگر یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$، وارون‌پذیر باشد، می‌توان ثابت کرد که سیستم وارون آن نیز LTI می‌باشد و پاسخ ضربه آن برابر سیگنالی به نام $h_i(t)$ خواهد بود، به‌طوری که خواهیم داشت:

$$\boxed{h(t)*h_i(t)=\delta(t)}$$

نوشتن انتگرال $x(t)$ به‌صورت کانولوشن

نکته ۷۵: فرمول پرکاربرد زیر را به خاطر بسپارید.

$$\boxed{\int_{t+a}^{t+b}x(\tau)\,d\tau = x(t)*\left[u(t+b)-u(t+a)\right]}$$

روابط پاسخ ضربه و پله شیفت‌یافته در سیستم‌های خطی

نکته ۷۶: اگر $h[n,k]$ پاسخ ضربه شیفت‌یافته (یعنی پاسخ به $\delta[n-k]$) و $s[n,k]$ پاسخ پله شیفت‌یافته (یعنی پاسخ به $u[n-k]$) در یک سیستم خطی زمان‌گسسته باشند، روابط زیر بین آن‌ها برقرار است:

$$\boxed{s[n,k]=\sum_{m=k}^{+\infty}h[n,m] \quad , \quad h[n,k]=s[n,k]-s[n,k+1]}$$

نکته ۷۷: اگر $h(t,\tau)$ پاسخ ضربه شیفت‌یافته (یعنی پاسخ به $\delta(t-\tau)$) و $s(t,\tau)$ پاسخ پله شیفت‌یافته (یعنی پاسخ به $u(t-\tau)$) در یک سیستم خطی زمان‌پیوسته باشند، روابط زیر بین آن‌ها برقرار است:

$$\boxed{s(t,\tau)=\int_{\tau}^{+\infty}h(t,\alpha)\,d\alpha \quad , \quad h(t,\tau)=-\frac{\partial s(t,\tau)}{\partial \tau}}$$

بررسی خواص سیستم‌های خطی با استفاده از پاسخ ضربه شیفت‌یافته

نکته ۷۸: شرط لازم و کافی برای بدون‌حافظه بودن یک سیستم خطی این است که $h[n,k]$ برای $n \neq k$ برابر صفر باشد که در این صورت رابطه سیستم نیز به‌صورت $y[n] = f(n)x[n]$ خواهد بود.

$y[n] = f(n)x[n]$	$\longleftrightarrow$	$h[n,k] = 0 \ , \ n \neq k$	$\longleftrightarrow$	سیستم خطی بدون‌حافظه زمان‌گسسته
$y(t) = f(t)x(t)$	$\longleftrightarrow$	$h(t,\tau) = 0 \ , \ t \neq \tau$	$\longleftrightarrow$	سیستم خطی بدون‌حافظه زمان‌پیوسته

نکته ۷۹: شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم خطی این است که $h[n,k]$ برای $n < k$ برابر صفر باشد، یا بطور معادل برای حالت زمان‌پیوسته $h(t,\tau)$ برای $t < \tau$ برابر صفر باشد.

$h[n,k] = 0 \ , \ n < k$	$\longleftrightarrow$	سیستم خطی علی زمان‌گسسته
$h(t,\tau) = 0 \ , \ t < \tau$	$\longleftrightarrow$	سیستم خطی علی زمان‌پیوسته

نکته ۸۰: شرط لازم و کافی برای TI بودن یک سیستم خطی این است که $h[n,k]$ تابعی از $n-k$ باشد، یا بطور معادل برای حالت زمان‌پیوسته $h(t,\tau)$ تابعی از $t-\tau$ باشد.

$h[n,k] \triangleq$ تابعی از "$n-k$"	$\longleftrightarrow$	سیستم خطی TI زمان‌گسسته
$h(t,\tau) \triangleq$ تابعی از "$t-\tau$"	$\longleftrightarrow$	سیستم خطی TI زمان‌پیوسته

نکته ۸۱: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم خطی زمان‌گسسته این است که $h[n,k]$ نسبت به k مطلقاً جمع‌پذیر باشد، یعنی مجموع $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n,k]|$ به‌ازای همه nها محدود باشد. همچنین شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم خطی زمان‌پیوسته این است که $h(t,\tau)$ نسبت به τ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، یعنی انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t,\tau)| d\tau$ به‌ازای همه tها محدود باشد.

$\forall n : \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n,k]| < \infty$	$\longleftrightarrow$	سیستم خطی پایدار زمان‌گسسته
$\forall t : \ \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t,\tau)| d\tau < \infty$	$\longleftrightarrow$	سیستم خطی پایدار زمان‌پیوسته

معادلات دیفرانسیلی و تفاضلی با ضرایب ثابت

نکته ۸۲: سه حالت مختلف را برای شرط کمکی در نظر می‌گیریم:

حالت اول؛ شرط سکون اولیه (یعنی اگر برای $t \le t_0$ ، $x(t)$ برابر صفر باشد، آنگاه برای $t \le t_0$ ، $y(t)$ نیز برابر صفر خواهد بود): اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط سکون اولیه باشند، حتماً LTI و علی خواهند بود.

حالت دوم؛ شرط کمکی غیرصفر $(y(t_0) = C \neq 0)$: اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط کمکی غیرصفر باشند، حتماً غیرخطی، TV و غیرعلی خواهند بود.

حالت سوم؛ شرط کمکی صفر $(y(t_0) = 0)$: اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط کمکی صفر باشند، حتماً خطی، TV و غیرعلی خواهند بود.

معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت ⟷ شرط سکون اولیه ⟵ سیستم LTI و علی

معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت ⟷ شرط کمکی غیرصفر ⟵ سیستم غیرخطی، TV و غیرعلی

معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت ⟷ شرط کمکی صفر ⟵ سیستم خطی، TV و غیرعلی

نکته ۸۳: مانند حالت زمان‌پیوسته سه حالت مختلف را برای شرط کمکی در نظر می‌گیریم:

حالت اول؛ شرط سکون اولیه: اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط سکون اولیه باشند، حتماً LTI و علی خواهند بود.

حالت دوم؛ شرط کمکی غیرصفر $(y[n_0] = C \neq 0)$: اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط کمکی غیرصفر باشند، حتماً غیرخطی، TV و غیرعلی خواهند بود.

حالت سوم؛ شرط کمکی صفر $(y[n_0] = 0)$: اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط کمکی صفر باشند، حتماً خطی، TV و غیرعلی خواهند بود.

معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت ⟷ شرط سکون اولیه ⟵ سیستم LTI و علی

معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت ⟷ شرط کمکی غیرصفر ⟵ سیستم غیرخطی، TV و غیرعلی

معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت ⟷ شرط کمکی صفر ⟵ سیستم خطی، TV و غیرعلی

فرکانس‌های موهومی در حالت زمان‌گسسته

نکته ۸۴: در حالت زمان‌گسسته، فرکانس‌های پایین حول مضارب زوج π $(\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots)$ و فرکانس‌های بالا حول مضارب فرد π $(\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \cdots)$ قرار دارند.

حول مضارب زوج π $(\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots)$ ⟷ فرکانس‌های پایین

حول مضارب فرد π $(\omega = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \cdots)$ ⟷ فرکانس‌های بالا

همگرایی و پیوستگی تبدیل فوریه

نکته ۸۵: شرط لازم و کافی برای اینکه تبدیل فوریه یک سیگنال زمان‌پیوسته یا زمان‌گسسته، همگرا و پیوسته باشد، این است که آن سیگنال مطلقاً انتگرال‌پذیر یا مطلقاً جمع‌پذیر باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty \longleftrightarrow X(\omega) \text{ همگرا و پیوسته}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \longleftrightarrow X(\omega) \text{ همگرا و پیوسته}$$

تبدیل فوریه سیگنال‌های زوج و فرد

نکته ۸۶: اگر سیگنال $x(t)$ زوج (یا فرد) باشد، تبدیل فوریه آن نیز زوج (یا فرد) خواهد بود. همچنین تبدیل فوریه قسمت زوج $x(t)$ (یعنی $x_e(t)$) برابر قسمت زوج $X(\omega)$ (یعنی $X_e(\omega)$) و تبدیل فوریه قسمت فرد $x(t)$ (یعنی $x_o(t)$) برابر قسمت فرد $X(\omega)$ (یعنی $X_o(\omega)$) می‌باشد.

$$X(\omega) \text{ فرد} \xleftrightarrow{F} x(t) \text{ فرد} \quad , \quad X(\omega) \text{ زوج} \xleftrightarrow{F} x(t) \text{ زوج}$$

$$X_o(\omega) \xleftrightarrow{F} x_o(t) \quad , \quad X_e(\omega) \xleftrightarrow{F} x_e(t)$$

دوره تناوب تبدیل فوریه زمان‌گسسته

نکته ۸۷: اگر سیگنال $x[n]$ حداکثر فقط در مضارب m ($\circ, \pm m, \pm ۲m, \cdots$) مقدار داشته باشد، یعنی در زمان‌های غیر مضرب m، برابر صفر باشد، آنگاه تبدیل فوریه آن با دوره تناوب $\frac{۲\pi}{m}$ متناوب خواهد بود. عکس این گزاره نیز برقرار است.

$$x[n] = \circ \ , \ n \neq \circ, \pm m, \pm ۲m, \cdots \longleftrightarrow X(\omega) \text{ متناوب با } \frac{۲\pi}{m}$$

نوشتن سیگنال‌های متناوب زمان‌گسسته دوتایی بر حسب نمایی

نکته ۸۸: هر سیگنال زمان‌گسسته متناوب با دوره تناوب ۲ که به شکل $z[n]$ تعریف شده باشد را می‌توان با استفاده از فرمول زیر به‌صورت نمایی نوشت:

$$z[n] = \begin{cases} A \ , & n \text{ زوج} \\ B \ , & n \text{ فرد} \end{cases} = \frac{A+B}{۲} + \frac{A-B}{۲}(-۱)^n$$

تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی

نکته ۸۹: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی باشد، تبدیل فوریه آن ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشد:

الف) $X(\omega)$ تقارن مزدوج (هرمیتی) دارد.

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

ب) $|X(\omega)|$ تابعی زوج و $\measuredangle X(\omega)$ تابعی فرد است.

$$\begin{cases} |X(\omega)| = |X(-\omega)| \\ \measuredangle X(\omega) = -\measuredangle X(-\omega) \end{cases}$$

ج) $X_R(\omega)$ تابعی زوج و $X_I(\omega)$ تابعی فرد است.

$$\begin{cases} X_R(\omega) = X_R(-\omega) \\ X_I(\omega) = -X_I(-\omega) \end{cases}$$

د) $X_R(\omega)$ با $X_e(\omega)$ و $jX_I(\omega)$ با $X_o(\omega)$ برابر است.

$$\begin{cases} X_R(\omega) = X_e(\omega) \\ jX_I(\omega) = X_o(\omega) \end{cases}$$

هـ) تبدیل فوریه $x_e(t)$ برابر $X_R(\omega)$ و تبدیل فوریه $x_o(t)$ برابر $jX_I(\omega)$ می‌باشد.

$$\begin{cases} x_e(t) \xleftrightarrow{F} X_R(\omega) \\ x_o(t) \xleftrightarrow{F} jX_I(\omega) \end{cases}$$

$x(t)$ حقیقی

$X^*(\omega) = X(-\omega)$

$|X(\omega)|$ زوج ، $\measuredangle X(\omega)$ فرد

$X_R(\omega)$ زوج ، $X_I(\omega)$ فرد

$X_R(\omega) = X_e(\omega)$, $jX_I(\omega) = X_o(\omega)$

$F\{x_e(t)\} = X_R(\omega)$, $F\{x_o(t)\} = jX_I(\omega)$

نکته ۹۰: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی و زوج باشد، تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج است و اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی و فرد باشد، تبدیل فوریه آن موهومی و فرد خواهد بود.

$x(t)$ حقیقی و زوج $\xleftrightarrow{F}$ $X(\omega)$ حقیقی و زوج

$x(t)$ حقیقی و فرد $\xleftrightarrow{F}$ $X(\omega)$ موهومی و فرد

محاسبه ضرایب سری فوریه با استفاده از تبدیل فوریه

نکته ۹۱: اگر سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره تناوب T به فرم $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t-kT)$ باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن برابر است با:

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t-kT) \xrightarrow{FS} a_k=\frac{1}{T}Z(k\omega_\circ)=\frac{1}{T}Z(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_\circ}}$$

ضرایب فوریه سیگنال‌های زوج و فرد

نکته ۹۲: اگر سیگنال متناوب $x(t)$ زوج (یا فرد) باشد، ضرایب فوریه آن نیز زوج (یا فرد) خواهد بود. همچنین ضرایب فوریه قسمت زوج $x(t)$ برابر قسمت زوج a_k (یعنی $ev\{a_k\}$) و ضرایب فوریه قسمت فرد $x(t)$ برابر قسمت فرد a_k (یعنی $od\{a_k\}$) می‌باشد.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x(t)\ \text{زوج} \xleftrightarrow{Fs} a_k\ \text{زوج} & , & x(t)\ \text{فرد} \xleftrightarrow{Fs} a_k\ \text{فرد} \\ x_e(t) \xleftrightarrow{Fs} ev\{a_k\} & , & x_o(t) \xleftrightarrow{Fs} od\{a_k\} \end{array}}$$

ضرایب فوریه سیگنال‌های متقارن نیم موج

نکته ۹۳: اگر سیگنال $x(t)$ تقارن نیم موج داشته باشد، یعنی $x(t)=-x(t+\frac{T}{2})$ یا $x(t)=-x(t-\frac{T}{2})$ باشد، آنگاه بسط سری فوریه $x(t)$ فقط شامل هارمونیک‌های فرد می‌باشد و ضرایب هارمونیک‌های زوج آن (a_{2k}) برابر صفر است. عکس این گزاره نیز برقرار می‌باشد.

$$\boxed{x(t)=-x(t\pm\frac{T}{2}) \longleftrightarrow a_{2k}=0}$$

دوره تناوب ضرایب فوریه زمان‌گسسته

نکته ۹۴: اگر سیگنال متناوب $x[n]$ حداکثر فقط در مضارب m ($0,\pm m,\pm 2m,\cdots$) مقدار داشته باشد، یعنی در زمان‌های غیر مضرب m، برابر صفر باشد، آنگاه ضرایب فوریه آن با دوره تناوب $\frac{N}{m}$ متناوب خواهد بود. عکس این گزاره نیز برقرار است.

$$\boxed{x[n]=0\ ,\ n\neq 0,\pm m,\pm 2m,\cdots \longleftrightarrow a_k\ \text{متناوب با}\ \frac{N}{m}}$$

محاسبه ضرایب فوریه بر اساس دوره تناوب غیراصلی

نکته ۹۵: اگر ضرایب فوریه یک سیگنال متناوب را بر اساس m برابرِ دوره تناوب اصلی آن محاسبه نماییم، ضرایب فوریه آن با ضریب m گسترده خواهند شد.

$$\boxed{T\ ,\ x(t) \xleftrightarrow{FS} a[k] \quad\Rightarrow\quad mT\ ,\ x(t) \xleftrightarrow{FS} a_{(m)}[k]}$$

ضرایب فوریه سیگنال‌های حقیقی

نکته ۹۶: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی باشد، ضرایب فوریه آن ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشد:

۱) a_k تقارن مزدوج (هرمیتی) دارد.

$$a_k^* = a_{-k}$$

۲) $|a_k|$ تابعی زوج و $\measuredangle a_k$ تابعی فرد است.

$$\begin{cases} |a_k| = |a_{-k}| \\ \measuredangle a_k = -\measuredangle a_{-k} \end{cases}$$

۳) $\mathrm{Re}\{a_k\}$ تابعی زوج و $\mathrm{Im}\{a_k\}$ تابعی فرد است.

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\} \\ \mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\} \end{cases}$$

۴) $\mathrm{Re}\{a_k\}$ با $\mathrm{ev}\{a_k\}$ و $j\mathrm{Im}\{a_k\}$ با $\mathrm{od}\{a_k\}$ برابر است.

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{ev}\{a_k\} \\ j\mathrm{Im}\{a_k\} = \mathrm{od}\{a_k\} \end{cases}$$

۵) ضرایب فوریه $x_e(t)$ برابر $\mathrm{Re}\{a_k\}$ و ضرایب فوریه $x_o(t)$ برابر $j\mathrm{Im}\{a_k\}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} x_e(t) \xleftrightarrow{FS} \mathrm{Re}\{a_k\} \\ x_o(t) \xleftrightarrow{FS} j\mathrm{Im}\{a_k\} \end{cases}$$

حقیقی $x(t)$ $\longleftrightarrow$

- $a_k^* = a_{-k}$
- زوج $|a_k|$ ، فرد $\measuredangle a_k$
- زوج $\mathrm{Re}\{a_k\}$ ، فرد $\mathrm{Im}\{a_k\}$
- $\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{ev}\{a_k\}$, $j\mathrm{Im}\{a_k\} = \mathrm{od}\{a_k\}$
- $FS\{x_e(t)\} = \mathrm{Re}\{a_k\}$, $FS\{x_o(t)\} = j\mathrm{Im}\{a_k\}$

نکته ۹۷: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی و زوج باشد، ضرایب فوریه آن نیز حقیقی و زوج است و اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی و فرد باشد، ضرایب فوریه آن موهومی و فرد خواهد بود.

$$\text{حقیقی و زوج } x(t) \xleftrightarrow{FS} \text{حقیقی و زوج } a_k$$

$$\text{حقیقی و فرد } x(t) \xleftrightarrow{FS} \text{موهومی و فرد } a_k$$

رابطه تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه

نکته ۹۸: اگر $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس $X(s)$ باشد، آنگاه رابطه سه طرفه زیر برقرار است:

$$
\begin{tikzcd}
F\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\} \text{ همگرا} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & x(t)e^{-\sigma t} \text{ مطلقاً انتگرال‌پذیر} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \left(\mathrm{Re}[s]=\sigma\right) \in \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} &
\end{tikzcd}
$$

و $x(t)$ شامل مشتقات ضربه نمی‌باشد.

نکته ۹۹: اگر $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس $X(s)$ باشد، آنگاه رابطه سه طرفه زیر برقرار است:

$$
\begin{tikzcd}
F\left\{x(t)\right\} = X(\omega) \text{ همگرا} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & x(t) \text{ مطلقاً انتگرال‌پذیر} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \overset{\text{محور } j\omega}{\left(\mathrm{Re}[s]=0\right)} \in \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} &
\end{tikzcd}
$$

و $x(t)$ شامل مشتقات ضربه نمی‌باشد.

نکته ۱۰۰: اگر سیگنالی تبدیل فوریه داشته باشد، ولی تبدیل فوریه آن ناپیوستگی داشته و یا در بازه‌ای از فرکانس برابر صفر باشد، آن سیگنال تبدیل لاپلاس نخواهد داشت، به‌عنوان مثال، سیگنال سینک، سیگنال ثابت و سیگنال‌های متناوب تبدیل لاپلاس ندارند.

$X(\omega)$ ناپیوسته یا شامل بازه فرکانسی صفر $\longrightarrow$ $X(s)$ وجود ندارد.

این نکته در مورد تبدیل $\mathcal{Z}$ نیز برقرار است.

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زوج و فرد

نکته ۱-۱: اگر $x(t)$ زوج (یا فرد) باشد، تبدیل لاپلاس آن نیز زوج (یا فرد) است، یعنی $X(s)=X(-s)$ (یا $X(s)=-X(-s)$) مـی‌باشـد. در نتیجه قطب‌ها و صفرهای $X(s)$، قرینه هم (متقارن) می‌باشند، یعنی اگر $s_\circ$ قطب $X(s)$ باشـد، $-s_\circ$ نیـز قطـب $X(s)$ خواهـد بـود، و اگر $s_\circ$ صفر $X(s)$ باشد، $-s_\circ$ نیز صفر $X(s)$ خواهد بود. همچنین ناحیه همگرایی $X(s)$ (یعنی R_X) نسبت به محور $j\omega$ قرینه اسـت و حتماً شامل محور $j\omega$ نیز خواهد بود، یعنی ناحیه همگرایی برابر $-\alpha<\operatorname{Re}[s]<\alpha$ است. این نکته و اثبات سطحی آن را در ذیل مشاهده می‌کنید:

$$x(t)\ \text{زوج (یا فرد)} \longrightarrow x(t)=\pm x(-t)$$

$$\Downarrow$$

$$X(s)=\pm X(-s) \longrightarrow \begin{cases} \text{قطب } s_\circ \longleftrightarrow \text{قطب } -s_\circ \\ \text{صفر } s_\circ \longleftrightarrow \text{صفر } -s_\circ \end{cases} \longrightarrow \text{قطب‌ها و صفرهای } X(s) \text{ متقارن می‌باشند.}$$

$$\Downarrow$$

$$R_X \equiv -R_X \longrightarrow -\alpha<\operatorname{Re}[s]<\alpha \quad , \quad \text{محور } j\omega \in R_X$$

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های حقیقی

نکته ۱-۲: اگر $x(t)$ حقیقی باشد و $X(s)$ قطبی (یا صفری) در $s_\circ$ داشته باشد، حتماً قطبی (یا صفری) در $s_\circ^*$ نیـز خواهـد داشـت، یعنـی قطب‌ها و صفرهای مختلط $X(s)$ مزدوج هستند.

$$x(t)\ \text{حقیقی} \longrightarrow x^*(t)=x(t)$$

$$\Downarrow$$

$$X^*(s^*)=X(s) \longrightarrow \begin{cases} \text{قطب } s_\circ \longleftrightarrow \text{قطب } s_\circ^* \\ \text{صفر } s_\circ \longleftrightarrow \text{صفر } s_\circ^* \end{cases} \longrightarrow \text{قطب‌ها و صفرهای } X(s) \text{ مزدوج می‌باشند.}$$

رابطه قطب در حوزه لاپلاس با حوزه زمان

نکته ۱۰۳: قطب مرتبه اول $s = a$ در یک تبدیل لاپلاس گویا، معادل عبارت $e^{at}u(\pm t)$ در حوزه زمان می‌باشد. اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب به‌صورت $Re[s] > a$ باشد، سیگنالِ سمت راستی یعنی $e^{at}u(t)$ در نظر گرفته می‌شود و اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب به‌صورت $Re[s] < a$ باشد، سیگنالِ سمت چپی یعنی $e^{at}u(-t)$ قابل قبول خواهد بود. همچنین قطب‌های مزدوج مرتبه اول به شکل $s = \sigma \pm j\omega_\circ$ در یک تبدیل لاپلاس گویا، معادل عباراتی به‌صورت $e^{\sigma t}\cos(\omega_\circ t)u(\pm t)$ یا $e^{\sigma t}\sin(\omega_\circ t)u(\pm t)$ در حوزه زمان می‌باشند. اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $Re[s] > \sigma$ باشد، سیگنالِ سمت راستی یعنی $e^{\sigma t}\cos(\omega_\circ t)u(t)$ یا $e^{\sigma t}\sin(\omega_\circ t)u(t)$ در نظر گرفته می‌شود و اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب به‌صورت $Re[s] < \sigma$ باشد، سیگنالِ سمت چپی یعنی $e^{\sigma t}\cos(\omega_\circ t)u(-t)$ یا $e^{\sigma t}\sin(\omega_\circ t)u(-t)$ قابل قبول خواهد بود.

قطب مرتبه اول $s = a$:
- $\xrightarrow{Re[s] > a}$ $e^{at}u(t)$
- $\xrightarrow{Re[s] < a}$ $e^{at}u(-t)$

قطب مرتبه اول $s = \sigma \pm j\omega_\circ$:
- $\xrightarrow{Re[s] > \sigma}$ $e^{\sigma t}\cos(\omega_\circ t)u(t)$ یا $e^{\sigma t}\sin(\omega_\circ t)u(t)$
- $\xrightarrow{Re[s] < \sigma}$ $e^{\sigma t}\cos(\omega_\circ t)u(-t)$ یا $e^{\sigma t}\sin(\omega_\circ t)u(-t)$

تأثیر ضربه و مشتقات آن در حوزه لاپلاس

نکته ۱۰٤: اگر درجه صورت $X(s)$ از درجه مخرج آن کمتر باشد، $x(t)$ شامل ضربه و مشتقات آن نمی‌باشد. ولی اگر درجه صورت $X(s)$ با درجه مخرج آن برابر باشد، $x(t)$ شامل ضربه می‌باشد. همچنین اگر درجه صورت $X(s)$، m مرتبه از درجه مخرج آن، بیشتر باشد، $x(t)$ شامل مشتق mام ضربه خواهد بود.

$X(s) \longrightarrow$
- درجه صورت $<$ درجه مخرج $\longrightarrow$ $\left(\delta(t)\right.$ یا $\left.\delta^{(n)}(t)\right) \notin x(t)$
- درجه صورت $=$ درجه مخرج $\longrightarrow$ $\delta(t) \in x(t)$
- درجه صورت $\underset{m\ \text{مرتبه}}{>}$ درجه مخرج $\longrightarrow$ $\delta^{m}(t) \in x(t)$

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های نیمه‌متناوب

نکته ۱۰۵: فرض کنید سیگنال $x(t)$ برای $t<0$ برابر صفر و برای $t \geq 0$ با دوره تناوب T متناوب است. اگر $f(t)$ برابر همان $x(t)$ در یک دوره تناوب باشد، تبدیل لاپلاس $x(t)$ برابر $X(s)=\frac{F(s)}{1-e^{-sT}}$ با ناحیه همگرایی $Re[s]>0$ می‌باشد که $F(s)$ برابر تبـدیل لاپـلاس سیگنال $f(t)$ است.

$$\begin{cases} x(t+T)=x(t) \ , \ t\geq 0 \\ x(t)=0 \ , \ t<0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(s)=\dfrac{F(s)}{1-e^{-sT}} \ , \ Re[s]>0 \\ f(t)=x(t) \ , \ 0\leq t<T \end{cases}$$

رابطه تبدیل $\mathscr{Z}$ و تبدیل فوریه

نکته ۱۰۶: اگر $x[n]$ دارای تبدیل $\mathscr{Z}$ برابر $X(z)$ باشد، آنگاه رابطه سه طرفه زیر برقرار است:

$$\begin{tikzcd} x[n]r^{-n} \text{ مطلقاً جمع‌پذیر} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & F\{x[n]r^{-n}\} \text{ همگرا} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & (|z|=r)\in ROC\{X(z)\} & \end{tikzcd}$$

نکته ۱۰۷: اگر $x[n]$ دارای تبدیل $\mathscr{Z}$ برابر $X(z)$ باشد، آنگاه رابطه سه طرفه زیر برقرار است:

$$\begin{tikzcd} x[n] \text{ مطلقاً جمع‌پذیر} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & F\{x[n]\} \text{ همگرا} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \underbrace{(|z|=1)}_{\text{دایره یکه}}\in ROC\{X(z)\} & \end{tikzcd}$$

تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های زوج و فرد

نکته ۱۰۸: اگر سیگنال $x[n]$ زوج (یا فرد) باشد، آنگاه $X(z) = X(z^{-1})$ (یا $X(z) = -X(z^{-1})$) می‌باشد. در نتیجه قطب‌ها و همچنین صفرهای $X(z)$، عکس هم می‌باشند، یعنی اگر z_0 قطب $X(z)$ باشد، z_0^{-1} نیز قطب $X(z)$ خواهد بود، و اگر z_0 صفر $X(z)$ باشد، z_0^{-1} نیز صفر $X(z)$ خواهد بود. همچنین ناحیه همگرایی $X(z)$ (یعنی R_x) نسبت به دایره یکه، تقارن معکوس دارد و حتماً شامل دایره یکه نیز خواهد بود، یعنی ناحیه همگرایی به‌صورت $\frac{1}{\alpha} < |z| < \alpha$ می‌باشد. این نکته و اثبات سطحی آن را در ذیل مشاهده می‌کنید:

$x[n] = \pm x[-n] \longleftarrow$ $x[n]$ زوج (یا فرد)

$\downarrow \quad \downarrow$

$X(z) = \pm X(z^{-1}) \longrightarrow \begin{cases} \text{قطب } z_0 \longleftrightarrow \text{قطب } z_0^{-1} \\ \text{صفر } z_0 \longleftrightarrow \text{صفر } z_0^{-1} \end{cases} \longrightarrow$ قطب‌ها و صفرهای $X(z)$ عکس هم می‌باشند.

$\downarrow \quad \downarrow$

$R_x \equiv (R_x)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\alpha} < |z| < \alpha \quad , \quad$ دایره یکه $\in R_x$

تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های حقیقی

نکته ۱۰۹: اگر $x[n]$ حقیقی باشد و $X(z)$ قطبی (یا صفری) در z_0 داشته باشد، حتماً قطبی (یا صفری) در z_0^* نیز خواهد داشت، یعنی قطب‌ها و صفرهای مختلط $X(z)$ مزدوج هستند.

$x^*[n] = x[n] \longleftarrow$ $x[n]$ حقیقی

$\downarrow \quad \downarrow$

$X^*(z^*) = X(z) \longrightarrow \begin{cases} \text{قطب } z_0 \longleftrightarrow \text{قطب } z_0^* \\ \text{صفر } z_0 \longleftrightarrow \text{صفر } z_0^* \end{cases} \longrightarrow$ قطب‌ها و صفرهای $X(z)$ مزدوج می‌باشند.

رابطه قطب در حوزه $\mathcal{Z}$ با حوزه زمان

نکته ۱۱۰: قطب مرتبه اول $z=\alpha$ در یک تبدیل $\mathcal{Z}$ گویا، معادل عبارت $\alpha^n u[\pm n]$ در حوزه زمان است. اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $|z|>\alpha$ باشد، سیگنالِ سمت راستی یعنی $\alpha^n u[n]$ را در نظر می‌گیریم و اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $|z|<\alpha$ باشد، سیگنالِ سمت چپی یعنی $\alpha^n u[-n]$ قابل قبول است. همچنین قطب‌های مزدوج مرتبه اول $z=re^{\pm j\omega_0}$ در یک تبدیل $\mathcal{Z}$ گویا، معادل عباراتی به‌صورت $r^n\cos(\omega_0 n)u[\pm n]$ یا $r^n\sin(\omega_0 n)u[\pm n]$ در حوزه زمان می‌باشند. اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $|z|>r$ باشد، سیگنالِ سمت راستی یعنی $r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$ یا $r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$ را در نظر می‌گیریم و اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $|z|<r$ باشد، سیگنالِ سمت چپی یعنی $r^n\cos(\omega_0 n)u[-n]$ یا $r^n\sin(\omega_0 n)u[-n]$ قابل قبول است.

قطب مرتبه اول $z=\alpha$:
- $|z|>\alpha$: $\alpha^n u[n]$
- $|z|<\alpha$: $\alpha^n u[-n]$

قطب مرتبه اول $z=re^{\pm j\omega_0}$:
- $|z|>r$: $r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$ یا $r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$
- $|z|<r$: $r^n\cos(\omega_0 n)u[-n]$ یا $r^n\sin(\omega_0 n)u[-n]$

تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال‌های نیمه‌متناوب

نکته ۱۱۱: فرض کنید سیگنال $x[n]$ برای $n<۰$ برابر صفر و برای $n\geq ۰$ با دوره تناوب N متناوب است. اگر $f[n]$ برابر همان $x[n]$ در یک دوره تناوب باشد، تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال $x[n]$ برابر $X(z)=\dfrac{F(z)}{۱-z^{-N}}$ با ناحیه همگرایی $|z|>۱$ می‌باشد که $F(z)$ برابر تبدیل $\mathcal{Z}$ سیگنال $f[n]$ است.

$$\begin{cases} x[n+N]=x[n] \ , & n\geq ۰ \\ x[n]=۰ \ , & n<۰ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(z)=\dfrac{F(z)}{۱-z^{-N}} \ , & |z|>۱ \\ f[n]=x[n] \ , & ۰\leq n<N \end{cases}$$

رابطه مساحت ورودی و خروجی در سیستم‌های LTI

نکته ۱۱۲: اگر سیگنال‌های x، h و y به ترتیب ورودی، پاسخ ضربه و خروجی یک سیستم LTI زمان‌پیوسته یا زمان‌گسسته باشند، روابط زیر بین انتگرال و مجموع آن‌ها برقرار است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]$$

رابطه پاسخ ضربه و پاسخ پله سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس

نکته ۱۱۳: اگر $h(t)$ پاسخ ضربه و $s(t)$ پاسخ پله یک سیستم LTI زمان‌پیوسته باشند، روابط زیر بین $h(t)$ و $s(t)$ در حوزه زمان، بین $H(\omega)$ و $S(\omega)$ در حوزه فوریه و بین $H(s)$ و $S(s)$ در حوزه لاپلاس برقرار است:

$$\begin{cases} s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \\ h(t) = s'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(\omega) = H(\omega)\left[\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] \\ H(\omega) = j\omega\, S(\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(s) = \dfrac{1}{s} H(s) \quad , \quad R_s \geq \left(R_h \cap \mathrm{Re}[s] > 0\right) \\ H(s) = s\,S(s) \quad , \quad R_h \geq \left[R_s \cap \left(-\infty < \mathrm{Re}[s] < +\infty\right)\right] \end{cases}$$

نکته ۱۱۴: اگر $h[n]$ پاسخ ضربه و $s[n]$ پاسخ پله یک سیستم LTI زمان‌گسسته باشند، روابط زیر بین $h[n]$ و $s[n]$ در حوزه زمان، بین $H(\omega)$ و $S(\omega)$ در حوزه فوریه و بین $H(z)$ و $S(z)$ در حوزه $\mathcal{Z}$ برقرار است:

$$\begin{cases} s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \\ h[n] = s[n] - s[n-1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(\omega) = H(\omega)\left[\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\tilde{\delta}(\omega)\right] \\ H(\omega) = (1-e^{-j\omega})\,S(\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} H(z) \quad , \quad R_s \geq \left[R_h \cap \left(|z| > 1\right)\right] \\ H(z) = (1-z^{-1})\,S(z) \quad , \quad R_h \geq \left[R_s \cap \left(|z| > 0\right)\right] \end{cases}$$

رابطه محدوده زمانی ورودی و خروجی در سیستم‌های LTI

نکته ۱۱۵: در یک سیستم LTI، اگر $x(t)$ و $h(t)$ هر دو سمت راستی باشند (یعنی از سمت چپ محدود باشند) و حد سمت چپ آن‌ها به ترتیب برابر x_1 و h_1 باشد، آنگاه $y(t)$ نیز سمت راستی خواهد بود و حد سمت چپ آن برابر $y_1 = x_1 + h_1$ می‌باشد. همچنین اگر $x(t)$ و $h(t)$ هر دو سمت چپی باشند (یعنی از سمت راست محدود باشند) و حد سمت راست آن‌ها به ترتیب برابر x_2 و h_2 باشد، آنگاه $y(t)$ نیز سمت چپی خواهد بود و حد سمت راست آن برابر $y_2 = x_2 + h_2$ می‌باشد. توجه داشته باشید که عکس این قضیه لزوماً برقرار نیست، یعنی مثلاً ممکن است $x(t)$ یا $h(t)$ سمت راستی نباشند اما $y(t)$ سمت راستی باشد.

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longrightarrow & [x_1 \, , \, x_2] \\ * & & + \quad + \\ h(t) & \longrightarrow & [h_1 \, , \, h_2] \\ \hline y(t) = x(t) * h(t) & \longrightarrow & [y_1 = x_1 + h_1 \, , \, y_2 = x_2 + h_2] \end{array}$$

تغییرات در ورودی ـ خروجی سیستم‌های LTI

نکته ۱۱۶: در یک سیستم LTI، اگر ورودی با سیگنال دلخواه $f(t)$ کانوالو شود، خروجی آن نیز با $f(t)$ کانوالو خواهد شد. به عبارت دیگر اگر ورودی $x_2(t)$ برابر ترکیب کانولوشنی از $x_1(t)$ و $f(t)$ باشد، خروجی $y_2(t)$ نیز برابر همان ترکیب از $y_1(t)$ و $f(t)$ خواهد بود.

$$\boxed{x_2(t) = f(t) * x_1(t) \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y_2(t) = f(t) * y_1(t)}$$

نکته ۱۱۷: در یک سیستم LTI، اگر پاسخ به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ باشد، پاسخ به مشتق و انتگرال ورودی به ترتیب برابر مشتق و انتگرال خروجی خواهد بود.

$$\boxed{x'(t) \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y'(t) \quad , \quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} \int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau}$$

پاسخ سیستم‌های LTI به ورودی‌های نمایی و متناوب

نکته ۱۱۸: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t) = e^{at}$ برابر $y(t) = H(a)e^{at}$ می‌باشد که $H(a)$ همان $H(s)$ به‌ازای $s = a$ است. بدیهی است که اگر $s = a$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار نداشته باشد، $H(a)$ و در نتیجه خروجی $y(t)$ در همه زمان‌ها بیکران و نامحدود خواهد شد.

$$\boxed{x(t) = e^{at} \xrightarrow[\text{با تابع } H(s)]{\text{سیستم LTI}} y(t) = \begin{cases} H(a)e^{at} & , \quad a \in ROC[H(s)] \\ H(a)e^{at} = \infty & , \quad a \notin ROC[H(s)] \end{cases}}$$

نکته ۱۱۹: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x[n]=\alpha^n$ برابر $y[n]=H(\alpha)\alpha^n$ می‌باشد که $H(\alpha)$ همان $H(z)$ (تابع تبدیل سیستم) به‌ازای $z=\alpha$ است (α در حالت کلی ثابت مختلط است). بدیهی است که اگر $z=\alpha$ در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار نداشته باشد، $H(\alpha)$ و در نتیجه $y[n]$ در همه زمان‌ها بیکران و نامحدود می‌شود.

$$x[n]=\alpha^n \xrightarrow[\text{با تابع } H(z)]{\text{سیستم LTI}} y[n]=\begin{cases}H(\alpha)\alpha^n & , \ \alpha\in ROC[H(z)]\\ H(\alpha)\alpha^n=\infty & , \ \alpha\notin ROC[H(z)]\end{cases}$$

نکته ۱۲۰: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ برابر $y(t)=H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ می‌باشد که $H(\omega_0)$ همان $H(\omega)$ (پاسخ فرکانسی سیستم) به‌ازای $\omega=\omega_0$ است. در حالت زمان‌گسسته نیز عبارت مشابهی وجود دارد.

$$x(t)=e^{j\omega_0 t} \longrightarrow y(t)=H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

سیستم LTI

$H(\omega)$

$$x[n]=e^{j\omega_0 n} \longrightarrow y[n]=H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}$$

$$x(t)=e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow y(t)=H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$$

سیستم LTI

$H(f)$

$$x[n]=e^{j2\pi f_0 n} \longrightarrow y[n]=H(f_0)e^{j2\pi f_0 n}$$

نکته ۱۲۱: در یک سیستم LTI حقیقی، پاسخ به ورودی‌های $\cos(\omega_0 t+\theta)$ و $\sin(\omega_0 t+\theta)$ به ترتیب برابر $|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t+\theta+\measuredangle H(\omega_0))$ و $|H(\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\theta+\measuredangle H(\omega_0))$ خواهد بود که $|H(\omega_0)|$ و $\measuredangle H(\omega_0)$ اندازه و فاز تابع $H(\omega)$ در $\omega=\omega_0$ می‌باشند.

$$x(t)=\cos(\omega_0 t+\theta) \longrightarrow y(t)=|H(\omega_0)|\cos\left(\omega_0 t+\theta+\measuredangle H(\omega_0)\right)$$

سیستم LTI و حقیقی

$$x(t)=\sin(\omega_0 t+\theta) \longrightarrow y(t)=|H(\omega_0)|\sin\left(\omega_0 t+\theta+\measuredangle H(\omega_0)\right)$$

نکته ۱۲۲: پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ به ورودی متناوب $x(t)$ با دوره تناوب اصلی T و فرکانس اصلی $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ و ضرایب فوریه a_k یعنی $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$ برابر است با:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow[H(\omega)]{\text{سیستم LTI}} y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{jk\omega_0 n} \xrightarrow[H(\omega)]{\text{سیستم LTI}} y[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 n}$$

در واقع ضرایب فوریه خروجی برابر $b_k=a_k H(k\omega_0)$ می‌باشد (البته به شرطی که دوره تناوب اصلی خروجی و ورودی یکسان باشند).

ویژگی‌های سیستم‌های LTI

نکته ۱۲۳: اگر بتوان رابطه یک سیستم را در حوزه زمان به‌صورت $y(t)=x(t)*h(t)$ یا در حوزه فرکانس به‌صورت $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$ (یا $Y(s)=X(s)H(s)$) نمایش داد، سیستم قطعاً LTI و دارای پاسخ ضربه $h(t)$ یا پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ (یا تابع تبدیل $H(s)$) می‌باشد. در حالت زمان‌گسسته نیز نکته مشابهی وجود دارد.

$$\begin{cases} y(t)=x(t)*\underbrace{h(t)}_{\text{تابعی از } t} \\ Y(\omega)=X(\omega)\underbrace{H(\omega)}_{\text{تابعی از } \omega} \\ Y(s)=X(s)\underbrace{H(s)}_{\text{تابعی از } s} \end{cases} \longleftrightarrow \text{سیستم LTI}$$

نکته ۱۲۴: در یک سیستم LTI، اگر ورودی $x(t)$ ترکیب خطی و انتقالی (یا در حالت کلی ترکیب کانولوشنی) از ورودی یا ورودی‌های دیگر باشد، خروجی آن نیز برابر ترکیب خطی و انتقالی (یا در حالت کلی ترکیب کانولوشنی) از خروجی یا خروجی‌های دیگر خواهد بود.

$$x(t)=\alpha x_1(t-t_1)+\beta x_2(t-t_2)+\cdots \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y(t)=\alpha y_1(t-t_1)+\beta y_2(t-t_2)+\cdots$$

$$x(t)=f_1(t)*x_1(t)+f_2(t)*x_2(t)+\cdots \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y(t)=f_1(t)*y_1(t)+f_2(t)*y_2(t)+\cdots$$

نکته ۱۲۵: اگر ورودی یک سیستم LTI به‌صورت نمایی دو طرفه e^{at} (در حالت زمان‌پیوسته) یا α^n (در حالت زمان‌گسسته) باشد، خروجی نیز مضربی ثابت از همین نمایی‌ها خواهد بود (البته صفر و بی‌نهایت نیز می‌توانند به عنوان یک مضرب ثابت تلقی شوند). a و α در حالت کلی ثابت مختلط هستند.

$$x(t)=e^{at} \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y(t)=A\,e^{at}$$

$$x[n]=\alpha^n \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y[n]=A\,\alpha^n$$

نکته ۱۲۶: در یک سیستم LTI، ناحیه همگرایی $X(s)$ (تبدیل لاپلاس ورودی) و ناحیه همگرایی $Y(s)$ (تبدیل لاپلاس خروجی) و ناحیه همگرایی $H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$ (تابع تبدیل سیستم) باید با هم اشتراک داشته باشند. در حالت زمان‌گسسته نیز نکته مشابهی در حوزه $\mathscr{Z}$ وجود دارد.

$$\text{سیستم LTI} \xleftrightarrow{Y(s)=X(s)H(s)} \left[R_x \cap R_y \cap R_h\right] \neq \varnothing$$

نکته ۱۲۷: در یک سیستم LTI، اگر طیف ورودی در بازه‌ای از فرکانس برابر صفر باشد، طیف خروجی نیز در آن بازه فرکانسی برابر صفر خواهد بود (منظور از طیف، همان تبدیل فوریه است).

$$X(\omega)=0\ ,\ \omega_1<\omega<\omega_2 \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} Y(\omega)=0\ ,\ \omega_1<\omega<\omega_2$$

سیستم‌های LTI وارون‌پذیر

نکته ۱۲۸: شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری یک سیستم LTI زمان‌پیوسته با تابع تبدیل $H(s)$ این است که $H(s)$ صفری در ناحیه همگرایی خود نداشته باشد. به‌طور معادل در حالت زمان‌گسسته، شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(z)$ این است که $H(z)$ صفری در ناحیه همگرایی خود نداشته باشد. البته اگر $H(z)$ صفری در $z = 0$ داشته باشد، استثنائاً مشکلی برای وارون‌پذیری سیستم ایجاد نخواهد شد.

سیستم LTI وارون‌پذیر $\xleftrightarrow{C.T}$ $\forall s \in ROC: \ H(s) \neq 0$

سیستم LTI وارون‌پذیر $\xleftrightarrow{D.T}$ $\forall (z \neq 0) \in ROC: \ H(z) \neq 0$

نکته ۱۲۹: شرط لازم برای وارون‌پذیری یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ این است که $H(\omega)$ صفری نداشته باشد.

سیستم LTI وارون‌پذیر $\longrightarrow$ $\forall \omega: \ H(\omega) \neq 0$

نکته ۱۳۰: اگر تابع تبدیل یک سیستم LTI وارون‌پذیر برابر $H(s)$ با ناحیه همگرایی R باشد، آنگاه تابع تبدیل سیستم وارون آن برابر $H_i(s)$ با ناحیه همگرایی R_i می‌باشد، به‌طوری که:

$$\boxed{H_i(s) = \frac{1}{H(s)} \quad , \quad ROC: R_i \quad , \quad R_i \cap R \neq \varnothing}$$

در حالت زمان‌گسسته نیز نکته مشابهی در حوزه $\mathscr{Z}$ وجود دارد.

سیستم‌های LTI علی

نکته ۱۳۱: شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ این است که $h(t)$ برای $t < 0$ برابر صفر باشد، یا به‌طور معادل در حالت زمان‌گسسته $h[n]$ برای $n < 0$ برابر صفر باشد.

سیستم LTI علی $\xleftrightarrow{C.T}$ $h(t)$ علی $\longleftrightarrow$ $h(t) = 0 \ , \ t < 0$

سیستم LTI علی $\xleftrightarrow{D.T}$ $h[n]$ علی $\longleftrightarrow$ $h[n] = 0 \ , \ n < 0$

نکته ۱۳۲: شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ این است که $s = +\infty$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار داشته باشد، یا به‌طور معادل، $z = \infty$ در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار داشته باشد.

سیستم LTI علی $\xleftrightarrow{C.T}$ $(s = +\infty) \in ROC[H(s)]$

سیستم LTI علی $\xleftrightarrow{D.T}$ $(z = \infty) \in ROC[H(z)]$

سیستم‌های LTI ضدعلی

نکته ۱۳۳: شرط لازم و کافی برای ضدعلی بودن یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ این است که $h(t)$ برای $t > 0$ برابر صفر باشد، یا به‌طور معادل در حالت زمان‌گسسته $h[n]$ برای $n > 0$ برابر صفر باشد.

سیستم LTI ضدعلی $\xrightarrow{C.T}$ $h(t)$ ضدعلی $\longleftrightarrow$ $h(t) = 0\ ,\ t > 0$

سیستم LTI ضدعلی $\xrightarrow{D.T}$ $h[n]$ ضدعلی $\longleftrightarrow$ $h[n] = 0\ ,\ n > 0$

نکته ۱۳۴: شرط لازم و کافی برای ضدعلی بودن یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ این است که $s = -\infty$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار داشته باشد، یا به‌طور معادل، $z = 0$ در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار داشته باشد.

سیستم LTI ضدعلی $\xrightarrow{C.T}$ $(s = -\infty) \in ROC\big[H(s)\big]$

سیستم LTI ضدعلی $\xrightarrow{D.T}$ $(z = 0) \in ROC\big[H(z)\big]$

سیستم‌های LTI پایدار

نکته ۱۳۵: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ این است که $h(t)$ سیگنالی پایدار (مطلقاً انتگرال‌پذیر) باشد، یا به‌طور معادل در حالت زمان‌گسسته $h[n]$ سیگنالی پایدار (مطلقاً جمع‌پذیر) باشد.

سیستم LTI پایدار $\xrightarrow{C.T}$ $h(t)$ پایدار $\longleftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

سیستم LTI پایدار $\xrightarrow{D.T}$ $h[n]$ پایدار $\longleftrightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

نکته ۱۳۶: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ این است که محور $j\omega$ ($Re[s] = 0$) یا به عبارت ساده‌تر ($s = 0$) در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار داشته باشد و $h(t)$ نیز شامل مشتقات ضربه نباشد، یا به‌طور معادل در حالت زمان‌گسسته، دایره یکه ($|z| = 1$) یا به عبارت ساده‌تر ($z = 1$) در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار داشته باشد.

سیستم LTI پایدار $\xrightarrow{C.T}$ $\begin{cases} \text{محور } j\omega \\ (s = 0) \in ROC\big[H(s)\big] \\ \text{و } h(t) \text{ شامل مشتقات ضربه نباشد.} \end{cases}$

سیستم LTI پایدار $\xrightarrow{D.T}$ دایره یکه $(z = 1) \in ROC\big[H(z)\big]$

نکته ۱۳۷: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ این است که $H(\omega)$ به‌ازای همه فرکانس‌ها کراندار (محدود) و پیوسته باشد.

$H(\omega)$ تابعی پیوسته و $\forall\omega:\ |H(\omega)|<\infty$ $\longleftrightarrow$ سیستم LTI پایدار

سیستم‌های LTI علی و پایدار

نکته ۱۳۸: <u>شرط لازم</u> برای علی و پایدار بودن یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ این است که هیچ قطبی در سمت راست محور $j\omega$ نباشد. به‌طور معادل در حالت زمان‌گسسته، هیچ قطبی نباید در خارج دایره یکه قرار گیرد.

سیستم LTI علی و پایدار $\xrightarrow{C.T}$ همه قطبهای $H(s)$ در سمت چپ محور $j\omega$

سیستم LTI علی و پایدار $\xrightarrow{D.T}$ همه قطبهای $H(z)$ در داخل دایره یکه

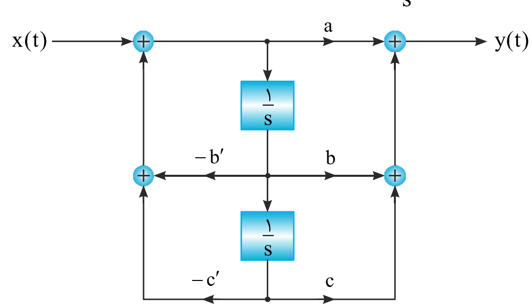
نکته ۱۳۹: شرط لازم و کافی برای اینکه هر دو ریشه چندجمله‌ای s^2+bs+c در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند، این است که $b,c>0$ باشند. البته اگر $\Delta\leq 0$ باشد (یعنی ریشه‌ها مضاعف یا مختلط باشند)، شرط $b>0$ کفایت می‌کند. همچنین شرط لازم و کافی برای اینکه هر دو ریشه چندجمله‌ای z^2+bz+c در داخل دایره یکه قرار داشته باشند، این است که $|c|<1$ و $|b|<2$ و $|b|<1+c$ باشند. البته اگر $\Delta\leq 0$ باشد (یعنی ریشه‌ها مضاعف یا مختلط باشند)، شرط $|c|<1$ کفایت می‌کند.

هر دو ریشه در سمت چپ محور $j\omega$ $\overset{s^2+bs+c}{\longleftrightarrow}$ $\begin{cases}\Delta>0 \longrightarrow b>0\ ,\ c>0\\ \Delta\leq 0 \longrightarrow b>0\end{cases}$

هر دو ریشه در داخل دایره یکه $\overset{z^2+bz+c}{\longleftrightarrow}$ $\begin{cases}\Delta>0 \longrightarrow |c|<1\ ,\ |b|<2\ ,\ |b|<1+c\\ \Delta\leq 0 \longrightarrow |c|<1\end{cases}$

دیاگرام بلوکی سیستم‌های LTI

نکته ۱۴۰: بلوک دیاگرام زیر معادل تابع تبدیل $H(s)=\dfrac{as^2+bs+c}{s^2+b's+c'}$ می‌باشد و پیشنهاد می‌شود آن را به خاطر بسپارید. این نکته به‌طور مشابه در حوزه $\mathcal{Z}$ به‌ازای $s=z$ یا $\frac{1}{s}=z^{-1}$ برقرار است.



فیلترهای FIR و IIR

نکته ۱۴۱: هر سیستم یا فیلتر LTI که رابطه ورودی ـ خروجی آن به‌صورت یک معادله تفاضلی باشد یا تابع تبدیل آن گویا و دارای قطب محدود و غیرصفر در صفحه Z باشد، IIR خواهد بود. همچنین اگر تابع تبدیل دارای قطب محدودِ غیرصفر نباشد، سیستم FIR خواهد بود.

سیستم IIR	$\longrightarrow$	رابطه تفاضلی یا قطب محدود و غیرصفر
سیستم FIR	$\longrightarrow$	عدم وجود قطب محدود و غیرصفر

فیلترهای تمام‌گذر

نکته ۱۴۲: در یک فیلتر تمام‌گذر زمان‌گسسته، صفرها عکس مزدوج قطب‌ها هستند و بالعکس. یعنی اگر $z_\circ$ قطب $H(z)$ باشد، $\frac{1}{z_\circ^*}$ صفر $H(z)$ خواهد بود و اگر $z_\circ$ صفر $H(z)$ باشد، $\frac{1}{z_\circ^*}$ قطب $H(z)$ خواهد بود. در حالت زمان‌پیوسته نیز صفرها قرینه مزدوج قطب‌ها هستند و بالعکس. یعنی اگر $s_\circ$ قطب $H(s)$ باشد، $-s_\circ^*$ صفر $H(s)$ خواهد بود و اگر $s_\circ$ صفر $H(s)$ باشد، $-s_\circ^*$ قطب $H(s)$ خواهد بود.

صفرها عکس مزدوج قطب‌ها هستند و بالعکس.	$\frac{1}{z_\circ^*}$ صفر $\longleftrightarrow$ قطب $z_\circ$ $\frac{1}{z_\circ^*}$ قطب $\longleftrightarrow$ صفر $z_\circ$	$\longrightarrow$	فیلتر تمام‌گذر زمان‌گسسته
صفرها قرینه مزدوج قطب‌ها هستند و بالعکس.	$-s_\circ^*$ صفر $\longleftrightarrow$ قطب $s_\circ$ $-s_\circ^*$ قطب $\longleftrightarrow$ صفر $s_\circ$	$\longrightarrow$	فیلتر تمام‌گذر زمان‌پیوسته

شناسایی سیستم‌ها

نکته ۱۴۳: یک سیستم LTI زمان‌پیوسته یا زمان‌گسسته را می‌توان با داشتن یک زوج ورودی ـ خروجی از آن کاملاً شناسایی کرد، به شرطی که طیف ورودی در هیچ فرکانسی صفر نباشد.

$\forall\omega:\ X(\omega)\neq \circ$	$\longrightarrow$	شرط لازم و کافی برای شناسایی یک سیستم LTI با ورودی $x(t)$

نکته ۱۴۴: یک سیستم خطی بدون‌حافظه را می‌توان با داشتن یک زوج ورودی ـ خروجی از آن کاملاً شناسایی کرد، به شرطی که سیگنال ورودی در هیچ زمانی صفر نباشد.

$\forall t: \ x(t) \neq 0$	$\longrightarrow$	شرط لازم و کافی برای شناسایی یک سیستم خطی بدون‌حافظه با ورودی $x(t)$

نکته ۱۴۵: یک سیستم LTI و بدون‌حافظه را می‌توان با داشتن یک زوج ورودی ـ خروجی از آن کاملاً شناسایی کرد، به شرطی که سیگنال ورودی حداقل در یک لحظه، مخالف صفر باشد.

$\forall t = t_0 : \ x(t_0) \neq 0$	$\longrightarrow$	شرط لازم و کافی برای شناسایی یک سیستم LTI و بدون‌حافظه با ورودی $x(t)$

نکته ۱۴۶: یک سیستم بدون‌حافظه و TI را می‌توان با داشتن یک زوج ورودی ـ خروجی از آن کاملاً شناسایی کرد (البته فقط برای ورودی‌های حقیقی)، به شرطی که سیگنال ورودی همه مقادیر حقیقی را به خود بگیرد.

$x(t)$ پوشا در گستره اعداد حقیقی	$\longrightarrow$	شرط لازم و کافی برای شناسایی یک سیستم بدون‌حافظه و TI با ورودی $x(t)$

نکته ۱۴۷: برای شناسایی یک سیستم خطی باید ورودی یا دسته ورودی‌هایی به سیستم اعمال کنیم که بتوان هر ورودی دلخواه دیگر را برحسب ترکیب خطی از آن‌ها نوشت. در این صورت با داشتن پاسخ آن دسته از ورودی‌ها پاسخ به هر ورودی دلخواه دیگر به‌دست خواهد آمد.

هر ورودی دلخواه را بتوان بر حسب ترکیب خطی از $x(t)$ نوشت.	$\longrightarrow$	شرط لازم و کافی برای شناسایی یک سیستم خطی با ورودی $x(t)$

نکته ۱۴۸: اگر در یک سیستم خطی، پاسخ به دسته ورودی‌های $\cos \omega_0 t$ به‌ازای همه ω_0 ها داده شود، سیستم برای ورودی‌های زوج شناسایی می‌شود و در نتیجه می‌توان رابطه آن را برای ورودی‌های زوج حدس زد. همچنین اگر پاسخ به دسته ورودی‌های $\sin \omega_0 t$ به‌ازای همه ω_0 ها داده شود، سیستم برای ورودی‌های فرد شناسایی می‌شود و در نتیجه می‌توان رابطه آن را برای ورودی‌های فرد حدس زد. و در حالت کلی اگر در یک سیستم خطی، پاسخ به دسته ورودی‌های $\cos \omega_0 t$ و $\sin \omega_0 t$ یا در واقع پاسخ به دسته ورودی‌های $e^{j\omega_0 t}$ به‌ازای همه ω_0 ها داده شود، سیستم (برای همه ورودی‌ها) کاملاً شناسایی می‌شود و در نتیجه می‌توان رابطه آن را برای همه ورودی‌ها حدس زد.

$x(t) = \cos \omega_0 t$	$\longrightarrow$	شناسایی سیستم خطی برای ورودی‌های زوج
$x(t) = \sin \omega_0 t$	$\longrightarrow$	شناسایی سیستم خطی برای ورودی‌های فرد
$x(t) = e^{j\omega_0 t}$	$\longrightarrow$	شناسایی سیستم خطی برای همه ورودی‌ها

نمونه‌برداری

نکته ۱۴۹: هرگاه از سیگنال زمان‌پیوسته‌ای، با پریود نمونه‌برداری T یا به‌طور معادل فرکانس نمونه‌برداری $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$ نمونه‌برداری کنیم، طیف آن سیگنال در حوزه ω، در $\frac{1}{T}$ ضرب و با مضاربی از ω_s به چپ و راست شیفت پیدا می‌کند و با هم جمع می‌شود.

$$\boxed{x_c(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\xrightarrow{F}\frac{1}{T}X_c(\omega)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_s)\ ,\ \omega_s=\frac{2\pi}{T}}$$

نکته ۱۵۰: هرگاه از سیگنال زمان‌پیوسته‌ای، با پریود نمونه‌برداری T یا به‌طور معادل فرکانس نمونه‌برداری $f_s=\frac{1}{T}$ نمونه‌برداری کنیم، طیف آن سیگنال در حوزه f، در $\frac{1}{T}$ ضرب و با مضاربی از f_s به چپ و راست شیفت پیدا می‌کند و با هم جمع می‌شود.

$$\boxed{x_c(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\xrightarrow{F}\frac{1}{T}X_c(f)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_s)\ ,\ f_s=\frac{1}{T}}$$

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی در لاپلاس

قضیه مقدار اولیه: اگر $x(t)$ برای $t<0$ برابر صفر باشد و در $t=0$ نیز ضربه یا مشتقات ضربه نداشته باشد، آنگاه $x(0^+)$ محدود و برابر $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$ خواهد بود.

$$\boxed{x(t)=0\ ,\ t<0\quad \text{و}\quad \left(\delta(t)\ \text{یا}\ \delta^{(n)}(t)\right)\notin x(t)\longrightarrow x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)}$$

قضیه مقدار نهایی: اگر $x(t)$ برای $t<t_0$ برابر صفر باشد و همه قطب‌های محدود $sX(s)$ نیز در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند یا به‌عبارت‌دیگر، $sX(s)$ هیچ قطب محدودی در سمت راست یا روی محور $j\omega$ نداشته باشد،[1] آنگاه $x(+\infty)$ محدود و برابر $x(+\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)$ خواهد بود؛ ولی اگر همه قطب‌های محدود $sX(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ قرار نداشته باشند، $s=0$ در ناحیه همگرایی $sX(s)$ قرار نخواهد گرفت و بنابراین: $x(+\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\infty$.

$$\boxed{x(t)=0\ ,\ t<t_0\longrightarrow\begin{cases}x(+\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)\ , & \text{همه قطب‌های محدود } sX(s) \text{ سمت چپ محور } j\omega\\ x(+\infty)=\infty\ , & \text{در غیر این صورت}\end{cases}}$$

[1] شرط وجود همه قطب‌های $sX(s)$ در سمت چپ محور $j\omega$، تضمین می‌کند که $s=0$ در ناحیه همگرایی $sX(s)$ قرار بگیرد، زیرا سیگنال سمت راستی است و ROC نیز سمت راستِ راست‌ترین قطب خواهد بود.

قضایای مقدار اولیه و نهایی در $\mathscr{Z}$

قضیه مقدار اولیه: اگر $x[n]$ برای $n<0$ برابر صفر باشد، آنگاه $x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)$ خواهد بود.

$$\boxed{x[n]=0\,,\ n<0 \quad\longrightarrow\quad x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)}$$

قضیه مقدار نهایی: اگر $x[n]$ برای $n<n_0$ برابر صفر باشد و همه قطب‌های محدود $(1-z^{-1})X(z)$ نیز در داخل دایره یکه قرار داشته باشند یعنی $(1-z^{-1})X(z)$ هیچ قطب محدودی در خارج یا روی دایره یکه نداشته باشد،[1] آنگاه $x[+\infty]$ محدود و برابر $x[+\infty]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$ خواهد بود ولی اگر همه قطب‌های محدود $(1-z^{-1})X(z)$ در داخل دایره یکه قرار نداشته باشند، $z=1$ در ناحیه همگرایی $(1-z^{-1})X(z)$ قرار نخواهد گرفت و بنابراین: $x[+\infty]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)=\infty$.

$$x[n]=0\,,\ n<n_0 \quad\longrightarrow\quad \begin{cases} x[+\infty]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z) \ , & \text{همه قطب‌های محدود } (1-z^{-1})X(z) \text{ در داخل دایره یکه} \\ x[+\infty]=\infty \ , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

[1] شرط وجود همه قطب‌های $(1-z^{-1})X(z)$ در داخل دایره یکه، تضمین می‌کند که $z=1$ در ناحیه همگرایی $(1-z^{-1})X(z)$ قرار بگیرد، زیرا سیگنال سمت راستی است و ROC نیز خارجِ خارجی‌ترین قطب خواهد بود.

سیگنال‌های مختلط

$$\mathrm{Re}\left[x(t)\right]=\frac{x(t)+x^{*}(t)}{۲} \qquad , \qquad \mathrm{Im}\left[x(t)\right]=\frac{x(t)-x^{*}(t)}{۲j}$$

$$\left|x(t)\right|^{۲}=x(t)\cdot x^{*}(t)$$

انرژی و توان

$$E_{\infty}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)\right|^{۲}dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^{۲}dt \qquad , \qquad P_{\infty}=\lim_{T\to\infty}\frac{E_{\infty}}{۲T}=\lim_{T\to\infty}\frac{۱}{۲T}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^{۲}dt$$

$$E_{\infty}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]\right|^{۲}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left|x[n]\right|^{۲} \qquad , \qquad P_{\infty}=\lim_{N\to\infty}\frac{E_{\infty}}{۲N+۱}=\lim_{N\to\infty}\frac{۱}{۲N+۱}\sum_{n=-N}^{N}\left|x[n]\right|^{۲}$$

فرمول تصاعد هندسی

$$\sum_{n=m_{۱}}^{m_{۲}}\alpha^{n}=\alpha^{m_{۱}}+\alpha^{m_{۱}+۱}+\cdots+\alpha^{m_{۲}}=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{m_{۱}}-\alpha^{m_{۲}+۱}}{۱-\alpha} & , \quad \alpha\neq ۱\\ m_{۲}-m_{۱}+۱ & , \quad \alpha=۱\end{cases}$$

ک.م.مِ دو عدد کسری

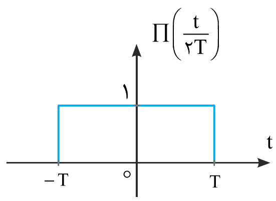
$$\mathrm{lcm}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)=\frac{\mathrm{lcm}(a,c)}{\gcd(b,d)}$$

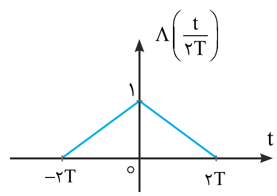
فرمول پادمشتق

$$\frac{d\left[\int_{g(t)}^{f(t)}h(\tau)\,d\tau\right]}{dt}=f'(t)\cdot h\big(f(t)\big)-g'(t)\cdot h\big(g(t)\big)$$

سیگنال‌های پالس و مثلث

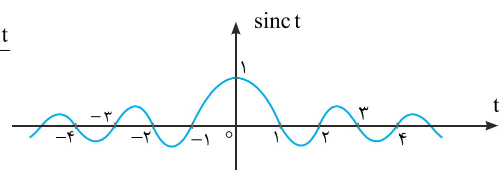
$$\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)=\prod\left(\frac{t}{2T}\right)=\begin{cases}1 & , \ |t|<T \\ 0 & , \ \text{O.W}\end{cases} \quad , \quad \Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)=\begin{cases}1-\dfrac{|t|}{2T} & , \ |t|<2T \\ 0 & , \ \text{O.W}\end{cases}$$





سیگنال سینک

$$\text{sinc}(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\text{sinc}(t)\,dt=1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}|\text{sinc}(t)|\,dt=\infty \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}|\text{sinc}(t)|^2\,dt=1$$

فرمول‌های اویلر

$$\begin{cases}e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \\ e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta\end{cases} \quad , \quad \cos\theta=\text{Re}\left[e^{j\theta}\right]=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta=\text{Im}\left[e^{j\theta}\right]=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

$$e^{\pm j2\pi}=1 \quad , \quad e^{\pm j\pi}=-1 \quad , \quad e^{j\frac{\pi}{2}}=e^{-j\frac{3\pi}{2}}=j \quad , \quad e^{-j\frac{\pi}{2}}=e^{j\frac{3\pi}{2}}=-j$$

$$e^{\pm j2\pi n}=1^n=1 \quad , \quad e^{\pm j\pi n}=(-1)^n \quad , \quad e^{j\frac{\pi}{2}n}=e^{-j\frac{3\pi}{2}n}=j^n \quad , \quad e^{-j\frac{\pi}{2}n}=e^{j\frac{3\pi}{2}n}=(-j)^n$$

$$e^{j(\theta\pm 2\pi n)}=e^{j\theta} \quad , \quad \cos(\theta\pm 2\pi n)=\cos\theta \quad , \quad \sin(\theta\pm 2\pi n)=\sin\theta$$

ضربه، پله و شیب زمان‌گسسته

$$\boxed{\delta[f(n)]=\begin{cases}1 & , f(n)=0\\ 0 & , f(n)\neq 0\end{cases} \quad , \quad u[f(n)]=\begin{cases}1 & , f(n)\geq 0\\ 0 & , f(n)<0\end{cases}}$$

$$\boxed{r[n]=\begin{cases}n & , n\geq 0\\ 0 & , n<0\end{cases}=nu[n] \quad , \quad r[f(n)]=\begin{cases}f(n) & , f(n)\geq 0\\ 0 & , f(n)<0\end{cases}=f(n)\cdot u[f(n)]}$$

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-n_0]=1}$$

$$\boxed{x[n]\cdot\delta[n-n_0]=x[n_0]\cdot\delta[n-n_0]=\begin{cases}x[n_0] & , n=n_0\\ 0 & , n\neq n_0\end{cases}}$$

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-k]=1}$$

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]=x[n]}$$

$$\boxed{\delta[an]=\delta[n] \quad , \quad \delta[af(n)]=\delta[f(n)] \quad , \quad a\neq 0}$$

$$\boxed{u[mn]=u[n] \quad , \quad u[mf(n)]=u[f(n)] \quad , \quad m>0}$$

$$\boxed{u[n]-u[n-1]=\delta[n]}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-k]=u[n] \quad , \quad \sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]=u[n]}$$

$$\boxed{\sum_{k=m_1}^{m_2}\delta[k-n_0]=u[m_2-n_0]-u[m_1-1-n_0] \quad , \quad m_2\geq m_1}$$

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n+kN]=\begin{cases}1 & , \text{n مضرب N}\\ 0 & , \text{O.W}\end{cases}}$$

ضربه، پله و شیب زمان‌پیوسته

$$u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}\delta(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)\,d\tau$$

$$u\big(f(t)\big)=\begin{cases}1 & , \ f(t)>0\\ 0 & , \ f(t)<0\end{cases} \quad , \quad \delta\big(f(t)\big)=u'\big(f(t)\big)=\frac{[u\big(f(t)\big)]'}{f'(t)}$$

$$r\big(f(t)\big)=f(t)\cdot u\big(f(t)\big)=\begin{cases}f(t) & , \ f(t)>0\\ 0 & , \ f(t)<0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$$

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau=x(t)$$

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \quad , \quad \delta\big(af(t)\big)=\frac{1}{|a|}\delta\big(f(t)\big) \quad , \quad a\neq 0$$

$$u(at)=u(t) \quad , \quad u\big(af(t)\big)=u\big(f(t)\big) \quad , \quad a>0$$

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$\int_{0}^{+\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau=u(t) \quad , \quad \int_{-\infty}^{t}\delta(\alpha)\,d\alpha=u(t)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\delta(\tau-t_0)\,d\tau=u(\beta-t_0)-u(\alpha-t_0)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}u(\tau-t_0)\,d\tau=r(\beta-t_0)-r(\alpha-t_0)=(\beta-t_0)u(\beta-t_0)-(\alpha-t_0)u(\alpha-t_0)$$

خاصیت انتقال‌دهندگی ضربه

$$\boxed{x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)}$$

رابطه مثلث و پالس

$$\boxed{\Lambda(t)=\Pi(t)*\Pi(t)}$$

رابطه کلی سیستم‌های خطی

$$\boxed{y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n,k]}$$

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t,\tau)d\tau}$$

توابع ویژه (مشتقات و انتگرال‌های ضربه)

$$\boxed{x(t)*\delta^{(n)}(t-t_0)=x^{(n)}(t-t_0)}$$

$$\boxed{x(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau-t_0)d\tau \qquad , \qquad x[n]*u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}x[k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k-n_0]}$$

$$\boxed{x(t)*u_{-n}(t)=\underbrace{\iiint\cdots\int}_{n}x(\tau)d\tau}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)dt=0}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\delta^{(n)}(t)\right|dt=+\infty}$$

$$\boxed{\delta'\left(a(t-t_0)\right)=\frac{1}{a|a|}\delta'(t-t_0)}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta^{(n)}(t-t_0)dt=(-1)^n x^{(n)}(t_0)}$$

نمونه‌برداری

ماکزیمم فرکانس $x_c(t)$	$\omega_M\ (\mathrm{rad/s})$ $f_M\ (\mathrm{Hz})$	, $\omega_M = ۲\pi f_M$
نرخ نایکوئیست	$۲\omega_M\ (\mathrm{rad/s})$ $۲f_M\ (\mathrm{Hz})$	, $\omega_M = ۲\pi f_M$
فرکانس نمونه‌برداری	$\omega_s = \frac{۲\pi}{T}\ (\mathrm{rad/s})$ $f_s = \frac{۱}{T}\ (\mathrm{Hz})$	, $\omega_s = ۲\pi f_s$

$$\boxed{X_d(\omega) = \frac{۱}{T} X_c\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad , \quad |\omega| < \pi}$$

$$\boxed{H_d(\omega) = H_c\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad , \quad |\omega| < \pi}$$

$$\boxed{h_d[n] = T\, h_c(nT)}$$

جدول تبدیل فوریه زمان‌پیوسته

حوزه فرکانس	حوزه زمان
$\frac{1}{j\omega - a}$	$e^{at}u(t) \ , \ Re[a] < 0$
$\frac{1}{(j\omega - a)^2}$	$te^{at}u(t) \ , \ Re[a] < 0$
$e^{j\omega t_0} \quad , \quad 1$	$\delta(t + t_0) \quad , \quad \delta(t)$
$2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad , \quad 2\pi\delta(\omega)$	$e^{j\omega_0 t} \quad , \quad 1$
$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	$u(t)$
$\Pi\left(\frac{\omega}{2w}\right)$	$\frac{\sin wt}{\pi t}$
$\frac{2\sin T\omega}{\omega}$	$\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$
$\frac{1}{2T}\left(\frac{2\sin T\omega}{\omega}\right)^2$	$\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$
$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$	$e^{-a\|t\|} \quad , \quad a > 0$
$(j\omega)^n$	$\delta^{(n)}(t)$
$\frac{2}{j\omega}$	$\operatorname{sgn} t$

جدول تبدیل فوریه زمان‌گسسته

حوزه زمان	حوزه فرکانس
$\alpha^{n}u[n]\ ,\ \lvert\alpha\rvert<۱$	$\dfrac{۱}{۱-\alpha e^{-j\omega}}$
$n\alpha^{n}u[n]\ ,\ \lvert\alpha\rvert<۱$	$\dfrac{\alpha e^{-j\omega}}{(۱-\alpha e^{-j\omega})^{۲}}$
$\delta[n+n_{\circ}]\quad ,\quad \delta[n]$	$e^{j\omega n_{\circ}}\quad ,\quad ۱$
$e^{j\omega_{\circ}n}\quad ,\quad ۱$	$۲\pi\tilde{\delta}(\omega-\omega_{\circ})\quad ,\quad ۲\pi\tilde{\delta}(\omega)$
$u[n]$	$\dfrac{۱}{۱-e^{-j\omega}}+\pi\tilde{\delta}(\omega)$
$\dfrac{\sin wn}{\pi n}\quad ,\quad \circ<w<\pi$	$\tilde{\Pi}\left(\dfrac{\omega}{۲w}\right)$
$\Pi\left(\dfrac{n}{۲N}\right)$	$\sin\left((۲N+۱)\dfrac{\omega}{۲}\right)\Big/\sin\dfrac{\omega}{۲}$
$\sum\limits_{k=<N>} a_{k}e^{jk\omega_{\circ}n}$	$\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} ۲\pi a_{k}\delta(\omega-k\omega_{\circ})$
$\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-kN]$	$\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\omega_{\circ}\delta(\omega-k\omega_{\circ})\quad ,\quad \omega_{\circ}=\dfrac{۲\pi}{N}$
$\alpha^{\lvert n\rvert}\quad ,\quad \lvert\alpha\rvert<۱$	$\dfrac{۱-\alpha^{۲}}{۱-۲\alpha\cos\omega+\alpha^{۲}}$

جدول خواص تبدیل فوریه در حوزه ω

خاصیت	حوزه زمان	حوزه فرکانس
خطی بودن	$Ax(t)+By(t)$ $Ax[n]+By[n]$	$AX(\omega)+BY(\omega)$
انتقال زمانی	$x(t+t_0)$ $x[n+n_0]$	$X(\omega)e^{j\omega t_0}$ $X(\omega)e^{j\omega n_0}$
انتقال فرکانسی	$x(t)e^{j\omega_0 t}$ $x[n]e^{j\omega_0 n}$	$X(\omega-\omega_0)$
وارونگی	$x(-t)$ $x[-n]$	$X(-\omega)$
مزدوجی	$x^*(t) \quad , \quad x^*(-t)$ $x^*[n] \quad , \quad x^*[-n]$	$X^*(-\omega) \quad , \quad X^*(\omega)$
مقیاس‌دهی	$x(\alpha t) \quad , \quad \frac{1}{\lvert\alpha\rvert}x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ $x_{(m)}[n]$ $x[mn]$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad , \quad X(\alpha\omega)$ $X(m\omega)$ $\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}X\left(\frac{\omega}{m}-\frac{2\pi}{m}i\right)$
کانولوشن	$x(t)*y(t)$ $x[n]*y[n]$	$X(\omega)Y(\omega)$
ضرب	$x(t)y(t)$ $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega)*Y(\omega)$ $\frac{1}{2\pi}X(\omega)\circledast Y(\omega)$
مشتق‌گیری (تفاضل) در زمان	$x'(t)$ $x[n]-x[n-1]$	$j\omega X(\omega)$ $(1-e^{-j\omega})X(\omega)$
انتگرال‌گیری (انباشتگی) در زمان	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ $\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$ $\frac{X(\omega)}{1-e^{-j\omega}}+\pi X(0)\tilde{\delta}(\omega)$
مشتق‌گیری در فرکانس	$tx(t)$ $nx[n]$	$jX'(\omega)$
دوگانی تبدیل فوریه زمان‌پیوسته	$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ $X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$	

جدول خواص تبدیل فوریه در حوزه f

خاصیت	حوزه زمان	حوزه فرکانس
خطی بودن	$Ax(t)+By(t)$ $Ax[n]+By[n]$	$AX(f)+BY(f)$
انتقال زمانی	$x(t+t_۰)$ $x[n+n_۰]$	$X(f)e^{j۲\pi f t_۰}$ $X(f)e^{j۲\pi f n_۰}$
انتقال فرکانسی	$x(t)e^{j۲\pi f_۰ t}$ $x[n]e^{j۲\pi f_۰ n}$	$X(f-f_۰)$
وارونگی	$x(-t)$ $x[-n]$	$X(-f)$
مزدوجی	$x^*(t) \quad , \quad x^*(-t)$ $x^*[n] \quad , \quad x^*[-n]$	$X^*(-f) \quad , \quad X^*(f)$
مقیاس‌دهی	$x(\alpha t) \quad , \quad \frac{۱}{\lvert\alpha\rvert}x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ $x_{(m)}[n]$ $x[mn]$	$\frac{۱}{\lvert\alpha\rvert}X\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad , \quad X(\alpha f)$ $X(mf)$ $\frac{۱}{m}\sum_{i=۰}^{m-۱}X\left(\frac{f}{m}-\frac{۱}{m}i\right)$
کانولوشن	$x(t)*y(t)$ $x[n]*y[n]$	$X(f)\,Y(f)$
ضرب	$x(t)\,y(t)$ $x[n]\,y[n]$	$X(f)*Y(f)$ $X(f)\circledast Y(f)$
مشتق‌گیری (تفاضل) در زمان	$x'(t)$ $x[n]-x[n-۱]$	$j۲\pi f\,X(f)$ $(۱-e^{-j۲\pi f})X(f)$
انتگرال‌گیری (انباشتگی) در زمان	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ $\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\frac{X(f)}{j۲\pi f}+\frac{۱}{۲}X(۰)\delta(f)$ $\frac{X(f)}{۱-e^{-j۲\pi f}}+\frac{۱}{۲}X(۰)\tilde{\delta}(f)$
مشتق‌گیری در فرکانس	$tx(t)$ $nx[n]$	$\frac{j}{۲\pi}X'(f)$
دوگانی تبدیل فوریه زمان‌پیوسته	$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$ $X(t) \xleftrightarrow{F} x(-f)$	

روابط پارسوال در تبدیل فوریه

حالت زمان‌پیوسته	حالت زمان‌گسسته
$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,Y(-\omega)\,d\omega$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,y[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)\,Y(-\omega)\,d\omega$
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,Y(\omega)\,d\omega$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,y[-n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)\,Y(\omega)\,d\omega$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \int_{1} \lvert X(f)\rvert^2 df$
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,Y(-f)\,df$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,y[n] = \int_{1} X(f)\,Y(-f)\,df$
$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\,Y(f)\,df$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,y[-n] = \int_{1} X(f)\,Y(f)\,df$

روابط پارسوال در سری فوریه

حالت زمان‌پیوسته	حالت زمان‌گسسته
$\frac{1}{T}\int_{T} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lvert a_k\rvert^2$	$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{k=<N>} \lvert a_k\rvert^2$
$\frac{1}{T}\int_{T} x(t)\,y(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{-k}$	$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\,y[n] = \sum_{k=<N>} a_k b_{-k}$
$\frac{1}{T}\int_{T} x(t)\,y(-t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k$	$\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]\,y[-n] = \sum_{k=<N>} a_k b_k$

جدول خواص سری فوریه

خاصیت	حوزه زمان	ضرایب فوریه
خطی بودن به شرط $T_x = T_y$	$Ax(t)+By(t)$ $Ax[n]+By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
انتقال زمانی	$x(t+t_0)$ $x[n+n_0]$	$a_k e^{jk\omega_0 t_0}$ $a_k e^{jk\omega_0 n_0}$
انتقال فرکانسی به شرط $m \in \mathbb{Z}$	$x(t)e^{jm\omega_0 t}$ $x[n]e^{jm\omega_0 n}$	a_{k-m}
وارونگی	$x(-t)$ $x[-n]$	a_{-k}
مزدوجی	$x^*(t) \quad , \quad x^*(-t)$ $x^*[n] \quad , \quad x^*[-n]$	$a_{-k}^* \quad , \quad a_k^*$
مقیاس‌دهی زمانی	$x(\alpha t) \; , \; \alpha > 0$ $x_{(m)}[n]$ $x[mn]$	a_k $\frac{1}{m}a_k$ $b[k]=\sum_{i=0}^{m-1} a_{(\frac{M}{N})}\left[k-\frac{M}{m}i\right] \; , \; M=\mathrm{lcm}(N,m)$
کانولوشن متناوب به شرط $T_x = T_y$	$x(t)\circledast y(t)$ $x[n]\circledast y[n]$	$T a_k b_k$ $N a_k b_k$
ضرب به شرط $T_x = T_y$	$x(t)y(t)$ $x[n]y[n]$	$a_k * b_k$ $a_k \circledast b_k$
مشتق‌گیری (تفاضل) در زمان	$x'(t)$ $x[n]-x[n-1]$	$jk\omega_0 a_k$ $(1-e^{-jk\omega_0})a_k$
انتگرال‌گیری (انباشتگی) در زمان به شرط $a_0 = 0$	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$b_k = \begin{cases} \frac{a_k}{jk\omega_0} & , \quad k \neq 0 \\ \frac{1}{T}\int_T y(t)dt & , \quad k = 0 \end{cases}$ $b_k = \begin{cases} \frac{a_k}{1-e^{-jk\omega_0}} & , \quad k \neq 0 \\ \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} y[n] & , \quad k = 0 \end{cases}$
دوگانی سری فوریه زمان‌گسسته به شرط $N_a = N$	$x[n] \xleftrightarrow{FS} a[k]$ $a[n] \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{N}x[-k]$	
دوگانی تبدیل فوریه زمان‌گسسته با سری فوریه زمان‌پیوسته به شرط $T_X = 2\pi$	$x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ $X(t) \xleftrightarrow{FS} x[-k]$	

جدول تبدیل لاپلاس

حوزه زمان	حوزه لاپلاس	ناحیه همگرایی
$e^{at}u(t)$ $-e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$Re[s] > Re[a]$ $Re[s] < Re[a]$
$t^n e^{at}\,u(t)$ $-t^n e^{at}\,u(-t)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$Re[s] > Re[a]$ $Re[s] < Re[a]$
$u(t)$ $-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re[s] > 0$ $Re[s] < 0$
$t^n u(t)$ $-t^n u(-t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$Re[s] > 0$ $Re[s] < 0$
$\delta(t)$ $\delta(t+t_0)$	1 e^{st_0}	کل صفحه S $Re[s] < +\infty$ یا $Re[s] > -\infty$
$\cos at\, u(t)$ $-\cos at\, u(-t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$Re[s] > 0$ $Re[s] < 0$
$\sin at\, u(t)$ $-\sin at\, u(-t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$Re[s] > 0$ $Re[s] < 0$
$e^{-a\|t\|} \;,\; a > 0$	$\frac{-2a}{s^2-a^2}$	$-a < Re[s] < a$
$\delta^{(n)}(t)$	s^n	$-\infty < Re[s] < +\infty$
$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$	$Re[s] > 0$

جدول خواص تبدیل لاپلاس

خاصیت	حوزه زمان	حوزه لاپلاس	ناحیه همگرایی
خطی بودن	$Ax(t)+By(t)$	$AX(s)+BY(s)$	$\geq \left(R_x \cap R_y\right)$
انتقال زمانی	$x(t+t_0)$	$X(s)e^{st_0}$	$R_x \overset{?}{\pm} \{s=+\infty \ \text{or} \ s=-\infty\}$
انتقال فرکانسی	$x(t)e^{s_0 t}$	$X(s-s_0)$	$R_x + \mathrm{Re}[s_0]$
وارونگی	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R_x$
مزدوجی	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
مقیاس‌دهی	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	aR_x
	$\frac{1}{\lvert a\rvert}x\left(\frac{t}{a}\right)$	$X(as)$	$\frac{R_x}{a}$
کانولوشن	$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	$\geq \left(R_x \cap R_y\right)$
مشتق‌گیری در زمان	$x'(t)$	$sX(s)$	$\geq \left[R_x \cap \left(-\infty < \mathrm{Re}[s] < +\infty\right)\right]$
انتگرال‌گیری در زمان	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$\geq \left[R_x \cap \left(\mathrm{Re}[s] > 0\right)\right]$
مشتق‌گیری در فرکانس	$tx(t)$	$-X'(s)$	R_x

جدول تبدیل $\mathscr{Z}$

حوزه زمان	حوزه $\mathscr{Z}$	ناحیه همگرایی
$\alpha^n u[n]$ $-\alpha^n u[-n-۱]$	$\frac{۱}{۱-\alpha z^{-۱}}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$ $\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^n u[n]$ $-n\alpha^n u[-n-۱]$	$\frac{\alpha z^{-۱}}{(۱-\alpha z^{-۱})^۲}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$ $\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$u[n]$ $-u[-n-۱]$	$\frac{۱}{۱-z^{-۱}}$	$\lvert z\rvert > ۱$ $\lvert z\rvert < ۱$
$n u[n]$ $-n u[-n-۱]$	$\frac{z^{-۱}}{(۱-z^{-۱})^۲}$	$\lvert z\rvert > ۱$ $\lvert z\rvert < ۱$
$\delta[n]$ $\delta[n+n_۰]$	۱ $z^{n_۰}$	کل صفحه Z $\lvert z\rvert > ۰$ یا $\lvert z\rvert < \infty$
$\cos an\, u[n]$ $-\cos an\, u[-n-۱]$	$\frac{۱-(\cos a)z^{-۱}}{۱-۲(\cos a)z^{-۱}+z^{-۲}}$	$\lvert z\rvert > ۱$ $\lvert z\rvert < ۱$
$\sin an\, u[n]$ $-\sin an\, u[-n-۱]$	$\frac{(\sin a)z^{-۱}}{۱-۲(\cos a)z^{-۱}+z^{-۲}}$	$\lvert z\rvert > ۱$ $\lvert z\rvert < ۱$
$\sum_{k=۰}^{+\infty}\delta[n-kN]$	$\frac{۱}{۱-z^{-N}}$	$\lvert z\rvert > ۱$

جدول خواص تبدیل $\mathscr{Z}$

خاصیت	حوزه زمان	حوزه $\mathscr{Z}$	ناحیه همگرایی
خطی بودن	$Ax[n]+By[n]$	$AX(z)+BY(z)$	$\geq \left(R_x \cap R_y\right)$
انتقال زمانی	$x[n+n_0]$	$X(z)z^{n_0}$	$R_x \overset{?}{\pm} \left\{\lvert z\rvert=\infty \text{ or } z=0\right\}$
مقیاس‌دهی در حوزه $\mathscr{Z}$	$x[n]z_0^n$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$\lvert z_0\rvert \cdot R_x$
وارونگی زمانی	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$(R_x)^{-1}$
مزدوجی	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
مقیاس‌دهی در زمان	$x_{(m)}[n]$	$X(z^m)$	$(R_x)^{\frac{1}{m}}$
	$x[mn]$	$\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} X\left(z^{\frac{1}{m}} e^{-j\frac{2\pi}{m}i}\right)$	$(R_x)^m$
کانولوشن	$x[n]*y[n]$	$X(z)Y(z)$	$\geq \left(R_x \cap R_y\right)$
تفاضل‌گیری در زمان	$x[n]-x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	$\geq \left[R_x \cap \left(\lvert z\rvert>0\right)\right]$
انباشتگی در زمان	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$\geq \left[R_x \cap \left(\lvert z\rvert>1\right)\right]$
مشتق‌گیری در حوزه $\mathscr{Z}$	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}=z^{-1}\frac{dX(z)}{dz^{-1}}$	R_x